ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 150-151

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 92

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 92

Α4. $\alpha \to \Sigma$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Sigma$, $\delta \to \Lambda$, $\varepsilon \to \Lambda$

ΘΕΜΑ Β

$f(x) = 2e^x(2x-3)$, $x \in R$, $P(A) = x_1$, $P(B) = -\dfrac{f(x_1)}{6\sqrt{e}}$

Β1. Είναι $A = R$

$$f'(x) = \left(2e^x\right)'(2x-3) + \left(2e^x\right)(2x-3)' = 2e^x(2x-3) + 2e^x \cdot 2 = 2e^x(2x-3+2) = 2e^x(2x-1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^x(2x-1) = 0 \overset{2e^x>0}{\Rightarrow} 2x-1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 2e^x(2x-1) > 0 \overset{2e^x>0}{\Rightarrow} 2x-1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f′(x)	$-$	0	$+$
f(x)	↘		↗

Στο $\left(-\infty , \frac{1}{2}\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Στο $\left[\frac{1}{2} , +\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Στο $x_1 = \frac{1}{2}$ η f έχει τοπικό ελάχιστο με τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{1}{2}}\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) = 2\sqrt{e}(1-3) = 2\sqrt{e}(-2) = -4\sqrt{3}$

Β2. Επειδή στο $x_1 = \frac{1}{2}$ η f έχει ελάχιστο είναι $P(A) = \frac{1}{2}$

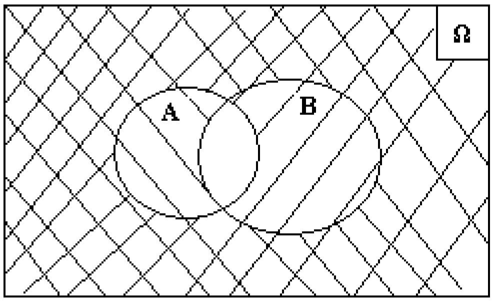
Είναι $P(B) = -\dfrac{f(x_1)}{6\sqrt{e}} = -\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{6\sqrt{e}} = -\dfrac{-4\cancel{\sqrt{e}}}{6\cancel{\sqrt{e}}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Β3. Έστω ότι τα Α , Β είναι ασυμβίβαστα οπότε ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6} > 1$ άτοπό .

Άρα τα A , B δεν είναι ασυμβίβαστα.

B4.



Είναι $P(A'\cap B') = P(A\cup B)'$

$$P(A'-B') = P(A') - P(A'\cap B') = 1 - P(A) - P(A\cup B)' =$$

$$1 - P(A) - \left(1 - P(A\cup B)\right) = \cancel{1} - P(A) \cancel{-1} + P(A\cup B) =$$

$$= -P(A) + P(A\cup B) = \cancel{-P(A)}\ \cancel{+P(A)} + P(B) - P(A\cap B) =$$

$$= P(B) - P(A\cap B) = P(B-A)$$

Είναι $B - A \subseteq B \Rightarrow P(B-A) \le P(B) \Rightarrow P(B-A) \le \frac{2}{3}$ **(1)**

Επίσης είναι $A\cap B \subseteq A \Rightarrow P(A\cap B) \le P(A) \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} -P(A\cap B) \ge -P(A) \overset{+P(B)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow P(B) - P(A\cap B) \ge P(B) - P(A) \Rightarrow P(B-A) \ge \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \Rightarrow P(B-A) \ge \frac{1}{6}$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει το ζητούμενο

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή F_3 και F_5 ρίζες της $5x^2 - 8x + 3\kappa = 0$ από τους τύπους του Vietta ισχύει :

$$\left.\begin{array}{l} F_3 + F_5 = -\frac{\beta}{\alpha} \\ F_5 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow F_3 + 1 = \frac{8}{5} \Rightarrow F_3 = \frac{8}{5} - 1 \Rightarrow F_3 = \frac{3}{5} \quad \textbf{(1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_3 \cdot F_5 = \frac{\gamma}{\alpha} \\ F_5 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow F_3 \cdot 1 = \frac{3\kappa}{5} \Rightarrow F_3 = \frac{3\kappa}{5} \quad \textbf{(2)}$$

Από **(1)** και **(2)** έχουμε $\frac{3}{5} = \frac{3\kappa}{5} \Rightarrow \kappa = 1$

Είναι επίσης $F_5\% = 100$ οπότε $\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0$

Έχει $\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-70) = 9 + 280 = 289 = 17^2$

Οπότε $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 17}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = -7 \end{array}\right.$

Άν $\lambda = -7$ τότε $F_1\% = \lambda \Rightarrow F_1\% = -7$ άτοπο . Άρα $\lambda = 10$

Γ2.

Είναι

$f_1\% = F_1\% = 10\%$

$F_2 = f_1 + f_2 \Rightarrow 40 = 10 + f_2 \Rightarrow f_2\% = 30\%$

$F_3 = \frac{3}{5} \Rightarrow F_3\% = \frac{3}{5} \cdot 100 = 60\%$

$F_3 = F_2 + f_3 \Rightarrow 60 = 40 + f_3 \Rightarrow f_3\% = 20\%$

$F_4 = F_3 + f_4 \Rightarrow 90 = 60 + f_4 \Rightarrow f_4\% = 30\%$

$F_5 = F_4 + f_5 \Rightarrow 100 = 90 + f_5 \Rightarrow f_5\% = 10\%$

Γ3. Οι κλάσεις έχουν τη μορφή
$[\alpha\ ,\ \alpha + c)$, $[\alpha + c\ ,\ \alpha + 2c)$, $[\alpha + 2c\ ,\ \alpha + 3c)$, $[\alpha + 3c\ ,\ \alpha + 4c)$, $[\alpha + 4c\ ,\ \alpha + 5c)$

Το 25% των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες του 16 είναι το κέντρο της 2ης κλάσης ενώ το 25% των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24 είναι το κέντρο της 4ης κλάσης

Οπότε $\frac{\alpha + c + \alpha + 2c}{2} = 16 \Rightarrow \frac{2\alpha + 3c}{2} = 16 \Rightarrow 2\alpha + 3c = 32$ **(1)**

και $\frac{\alpha + 3c + \alpha + 4c}{2} = 24 \Rightarrow \frac{2\alpha + 7c}{2} = 24 \Rightarrow 2\alpha + 7c = 48$ **(2)**

Από τις **(1)** και **(2)** έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha + 3c = 32 \\ 2\alpha + 7c = 48 \end{array}\right\} \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} \cancel{-2\alpha} - 3c = -32 \\ \cancel{2\alpha} + 7c = 48 \end{array}\right. \oplus$$

$$4c = 16 \Rightarrow c = 4$$

Για $c = 4$ είναι $2\alpha + 12 = 32 \Rightarrow 2\alpha = 20 \Rightarrow \alpha = 10$

Οπότε ο πίνακας γίνεται

[,)	**x_i**	**$f_i\%$**	**F_i**	**$F_i\%$**
$[10\ ,\ 14)$	12	10	0,1	10
$[14\ ,\ 18)$	16	30	0,4	40
$[18\ ,\ 22)$	20	20	0,6	60
$[22\ ,\ 26)$	24	30	0,9	90
$[26\ ,\ 30)$	28	10	1	100
Σύνολο		100		

Γ4.
Οι παρατηρήσεις που είναι μεγαλύτερες ή ίσες από 22 είναι το 40% οπότε έχουμε

Το $40\% \rightarrow 800$ παρατηρήσεις

Το $100\% \rightarrow \nu$ παρατηρήσεις

$\nu = \frac{\cancel{800}^{200} \cdot 10\cancel{0}}{4\cancel{0}} \Rightarrow \nu = 2000$ παρατηρήσεις

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}+1 \quad , \quad \Omega=\{\omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \omega_4\} \quad , \quad \omega_1=-1 , \omega_2=0 , 1<\omega_3<\omega_4$$

$$P(\omega_i)=f(\omega_i)-\frac{1}{3} , \ i=1 , 2 \quad , \quad P(\omega_3)=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}$$

Δ1. α) $$f'(x)=\frac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

$$P(\omega_3)=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}}{x-1}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x^2+1)^2}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{-\cancel{(x-1)}(1+x)}{\cancel{(x-1)}(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1+1}{(1^2+1)^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{2^2}=\frac{1}{\cancel{6}_3}\cdot\frac{\cancel{2}}{4}=\frac{1}{12}$$

Είναι $f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+1}+1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ οπότε $P(\omega_1)=f(\omega_1)-\frac{1}{3}=f(-1)-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Είναι $f(0)=\frac{0}{0^2+1}+1=0+1=1$ οπότε $P(\omega_2)=f(\omega_2)-\frac{1}{3}=f(0)-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Ισχύει $P(\Omega)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)\Rightarrow 1=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}+P(\omega_4)\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1=\frac{2}{12}+\frac{8}{12}+\frac{1}{12}+P(\omega_4)\Rightarrow 1-\frac{11}{12}=P(\omega_4)\Rightarrow\frac{1}{12}=P(\omega_4)$$

β) $A=\{\omega\in\Omega \ / \ f'(\omega)\le 0\}$

$$f'(x)\le 0\Rightarrow\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\le 0\Rightarrow 1-x^2\le 0\overset{(x^2+1)^2>0}{\Rightarrow} x^2\ge 1\Rightarrow |x|\ge 1\Rightarrow x\le -1 \text{ ή } x\ge 1$$

Οπότε $f'(\omega)\le 0\Rightarrow \omega\le -1$ ή $\omega\ge 1$ με $\omega\in\Omega$ **,** άρα $A=\{\omega_1 , \omega_3 , \omega_4\}$

Είναι $P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$B=\{\omega\in\Omega \ / \ f(\omega)>1\}$

$$f(x)>1\Rightarrow\frac{x}{x^2+1}\cancel{+1}>\cancel{1}\Rightarrow\frac{x}{x^2+1}>0\overset{x^2+1>0}{\Rightarrow} x>0$$

Οπότε $f(\omega)>1\Rightarrow\omega>0$, άρα $B=\{\omega_3 , \omega_4\}$

Είναι $P(B)=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$\Gamma=\left\{\omega\in\Omega\ /\ x^2+\omega x\geq-\frac{1}{4}\ ,\ x\in R\right\}$

$x^2+\omega x\geq-\frac{1}{4}\Rightarrow x^2+\omega x+\frac{1}{4}\geq 0$ (Τριώνυμο ως προς x , για να είναι το τριώνυμο ≥ 0 για κάθε $x\in R$ πρέπει $\Delta\leq 0$)

$\Delta\leq 0\Rightarrow \omega^2-4\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\leq 0\Rightarrow \omega^2-1\leq 0\Rightarrow \omega^2<1\Rightarrow |\omega|<1\Rightarrow -1<\omega<1$

Άρα $\Gamma=\{\omega_1\ ,\ \omega_2\}$ και είναι $P(\Gamma)=P(\omega_1)+P(\omega_2)=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{2}{12}+\frac{8}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

Για το $P(A-B)$

Α' Τρόπος

Είναι $A-B=\{\omega_1\}$ οπότε $P(A-B)=P(\omega_1)=\frac{1}{6}$

Β΄ Τρόπος

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{4}{12}-\frac{2}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

Επειδή $A\cap B=\{\omega_3\ ,\ \omega_4\}$ και $P(A\cap B)=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}$

Δ2.

Η εφαπτομένη (ε) έχει μορφή $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$

Είναι $\lambda=\varepsilon\varphi 45^o=1$ οπότε $\varepsilon: y=x+\beta$

Έστω x_0 το σημείο επαφής

Ισχύει $\lambda=f'(x_0)\Rightarrow 1=\frac{1-{x_0}^2}{\left({x_0}^2+1\right)^2}\Rightarrow \left({x_0}^2+1\right)^2=1-{x_0}^2\Rightarrow {x_0}^4+2{x_0}^2\cancel{+1}\cancel{-1}+{x_0}^2=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow {x_0}^4+3{x_0}^2=0\Rightarrow {x_0}^2\left({x_0}^2+3\right)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}{x_0}^2=0\\ \acute{\eta}\\ {x_0}^2+3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x_0=0\\ \acute{\eta}\\ {x_0}^2=-3\ \text{αδύνατο}\end{array}\right\}$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $M(0\ ,\ f(0))=(0\ ,\ 1)$

Το Μ σημείο της εφαπτομένης οπότε $1=0+\beta\Rightarrow\beta=1$

Οπότε $\varepsilon: y=x+1$

Δ3. $M_\kappa\left(\omega_\kappa\ ,\ y_\kappa\right)$, $\kappa=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4$ σημεία της $\varepsilon: y=x+1$ με $2\delta_{\omega_\kappa}=\delta_{y_\kappa}$ και $R_{y_\kappa}=5$

$y_1=\omega_1+1=-1+1=0$

$y_2=\omega_2+1=0+1=1$

$y_3=\omega_3+1$ και $y_4=\omega_4+1$

Είναι $\omega_3<\omega_4 \overset{+1}{\Rightarrow} \omega_3+1<\omega_4+1 \Rightarrow y_3<y_4$ οπότε $R_{y_\kappa}=y_4-y_1 \Rightarrow 5=y_4-0 \Rightarrow 5=y_4$

Άρα $y_4=\omega_4+1 \Rightarrow 5=\omega_4+1 \Rightarrow \omega_4=4$

$$\left.\begin{array}{l}\delta_{\omega_\kappa}=\dfrac{\omega_2+\omega_3}{2}\\ \delta_{y_\kappa}=\dfrac{y_2+y_3}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\delta_{\omega_\kappa}=\dfrac{0+\omega_3}{2}\\ \delta_{y_\kappa}=\dfrac{1+\omega_3+1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\delta_{\omega_\kappa}=\dfrac{\omega_3}{2}\\ \delta_{y_\kappa}=\dfrac{2+\omega_3}{2}\end{array}\right.$$

Είναι $2\delta_{\omega_\kappa}=\delta_{y_\kappa} \Rightarrow \cancel{2}\dfrac{\omega_3}{\cancel{2}}=\dfrac{2+\omega_3}{2} \Rightarrow 2\omega_3=2+\omega_3 \Rightarrow 2\omega_3-\omega_3=2 \Rightarrow \omega_3=2$

Επιμέλεια : Μυλωνίδης Σ. - Τάνης Σ.