ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Απόδειξη βιβλίου σελ 194

Α2.

Ορισμός βιβλίου σελ 246

Α3.

α) Λ
β) Σ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow$

$(z-2)(\overline{z-2})+|z-2|=2 \Leftrightarrow$

$|z-2|^2+|z-2|-2=0$

Θέτουμε $\omega=|z-2|\geq 0$

Άρα, $\omega^2+\omega-2=0$

$\Delta=1-4\cdot 1\cdot(-2)=9$

$\omega_{1,2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\left\langle \begin{array}{l} -2<0 \text{ απορρίπτεται} \\ 1>0 \text{ δεκτή} \end{array}\right.$

Οπότε,

Για $\omega=1 \Leftrightarrow |z-2|=1 \overset{z=x+y_i}{\Leftrightarrow} |(x+y_i)-2|=1 \Leftrightarrow$

$|(x-2)+y_i|=1 \Leftrightarrow |(x-2)+y_i|^2=1 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+y^2=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα ρ=1.

Είναι,

$|z| = |(z-2)+2| \le |z-2| + 2 \Leftrightarrow$

$|z| \le 1+2 \Leftrightarrow |z| \le 3$

B2.

Εφόσον z_1, z_2 ρίζες της εξίσωσης $w^2+\beta w+\gamma=0$ προκύπτει $z_1=x+yi$ και $z_2=x-yi$

$|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2 \Rightarrow$

$|y-(-y)|=2 \Rightarrow |2y|=2 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y \pm 1$

Από τύπους Vieta έχουμε:

$S=z_1+z_2=-\beta \Rightarrow 2x=-\beta$

$P=z_1z_2=\gamma \Rightarrow x^2+y^2=\gamma$

$|z_1-2|=1 \Rightarrow |x+yi-2|=1 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2=1 \left\langle \begin{matrix} y=1 \Rightarrow x^2-4x+4+1=1 \\ y=-1 \Rightarrow x^2-4x+4+1=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2-4x+4+\cancel{1}=\cancel{1} \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

Άρα $\beta=-2x=-2\cdot 2=-4$

Οπότε $\gamma=x^2+y^2=2^2+1=5$

B3.

Α τρόπος

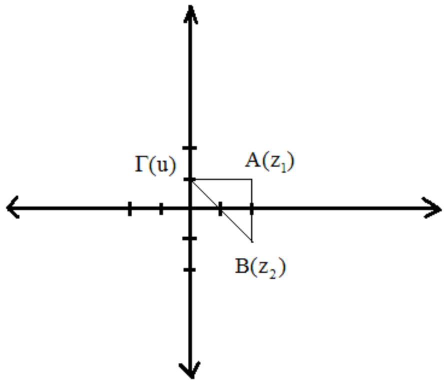
$z_1=2+i \qquad z_2=2-i \qquad u=\left(\dfrac{z_1+i}{z_2-i}\right)^{2013}$

Εικόνα του z_1: $A(z_1)=(2,1)$

Εικόνα του z_2: $B(z_2 0=(2,-1)$

$$\frac{z_1+i}{z_2-i}=\frac{2+i+i}{2-i-i}=\frac{2+2i}{2-2i}=\frac{2(1+i)}{2(1-i)}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(1+i)^2}{1+1}=\frac{\cancel{1}+2i\cancel{-1}}{2}=i$$

Είναι $u=i^{2013}=i^{4\cdot 503+1}=i$. Άρα εικόνα του u: $\Gamma(u)=(0,1)$



$$\left.\begin{array}{l} A\Gamma // x'x \text{ επειδή } y_\Gamma = y_A \\ A\Gamma \perp x'x \text{ επειδή } x_A = x_B \\ \text{και } y_A = -y_B \text{ δηλαδή είναι} \\ \text{συμμετρικά ως προς } x'x \end{array}\right\} A\Gamma \perp AB$$

Επομένως $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ορθογώνιο

Και $(AB\Gamma) = \dfrac{(AB)(A\Gamma)}{2} = \dfrac{2\cdot 2}{2} = 2$ τ.μ

Β΄ τρόπος

A(2,1)   B(2,-1)   Γ(0,1)

$$\overrightarrow{AB} = (2-2,-1-1) = (0,-2)$$
$$\overrightarrow{A\Gamma} = (0-2,1-1) = (-2,0)$$

$$(\overset{\Delta}{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right| \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|0-4| = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \frac{4}{x-1} + \alpha x \quad x \neq 1$$
$$f'(x) = \left(\frac{4}{x-1} + \alpha x\right)' = \frac{-4}{(x-1)^2} + \alpha$$
$$f'(2) = -4 + \alpha$$

Γ1.

ε: $x-3y+6=0$ με $\lambda_\varepsilon=-\dfrac{A}{B}=\dfrac{1}{3}$

Έστω (η) η εφαπτομένη της C_f.

Τότε $\varepsilon \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta=-1 \Leftrightarrow \lambda_\eta=-3$

Πρέπει $\lambda_\eta=f'(2)=-3 \Leftrightarrow$

$$-4+\alpha=-3 \Leftrightarrow \alpha=1$$

Γ2.

Για α=1:

$f(x)=\dfrac{4}{x-1}+x,\quad x\neq 1$

- $f'(x)=-\dfrac{4}{(x-1)^2}+1=\dfrac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}$
- $f'(x)=0 \Rightarrow (x-1)^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \Rightarrow x=3 \\ x-1=-2 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$
- $f'(x)>0 \Rightarrow (x-1)^2-4>0 \Rightarrow$

  $(x-1)^2>4 \Rightarrow$

  $|x-1|>2 \begin{cases} x-1>2 \Rightarrow x>3 \\ x-1<-2 \Rightarrow x<-1 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Τ.Μ		Τ.Ε		

Η f γνησίως αύξουσα $(-\infty,-1]$ και

Η f γνησίως φθίνουσα $[-1,3]$ και

Η f γνησίως αύξουσα $[3,+\infty)$

Ακρότατα

Η f παρουσιάζει για x = -1 τοπικό μέγιστο , το

$f(-1)=\dfrac{4}{-2}-1=-2-1=-3$

Η f παρουσιάζει για x = 3 τοπικό ελάχιστο , το

$f(3)=\dfrac{4}{2}+3=2+3=5$

Γ3.

$$f(x)=\frac{4}{x-1}+x=\frac{4}{x-1}+\frac{x(x-1)}{(x-1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2-x+4}{x-1},\ x\neq 1$$

Κατακόρυφη ασύμπτωτη

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[(x^2-x+4)\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)\right]=+\infty$.

  Άρα η $x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f για $x>1$

Επειδή

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-x+4)=4$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\left(x^2-x+4\right)\frac{1}{x-1}\right)=-\infty$

  Άρα η $x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f για $x<1$

Επειδή

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-x+4\right)=4$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$

Πλάγια ασύμπτωτη

Αναζητούμε ευθεία $y=\lambda x+\beta$ με :

- $\lambda=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x+4}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x+4}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$
- $\beta=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4}{x-1}+x-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x-1}=0$

Άρα, η $\varepsilon: y=\lambda x+\beta\Leftrightarrow y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$.

Γ4.

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)f(x)-6}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)\dfrac{x^2-x+4}{x-1}-6}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x-1}=\frac{-1-2}{-1-1}=\frac{3}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f(x)=x^2+x\cdot\sqrt{x^2+1}$

$f'(x)=2x+\sqrt{x^2+1}+x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x \Leftrightarrow f'(x)=2x+\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x\cdot\sqrt{x^2+1}+x^2+1+x^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x\cdot\sqrt{x^2+1}+1=0 \Rightarrow 2x^2+1=-2x\cdot\sqrt{x^2+1}$ **(1)**

- $\left.\begin{aligned}\text{Αν } x>0 \Rightarrow -2x<0\\ \sqrt{x^2+1}>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow -2x\sqrt{x^2+1}<0$

  Άρα η **(1) αδύνατη** δηλαδή δεν μηδενίζεται η f' οπότε $f'(x)\neq 0$

  Οπότε η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο δηλαδή η f είναι γνησίως μονότονη

- $\left.\begin{aligned}\text{Αν } x<0 \Rightarrow -2x>0\\ \sqrt{x^2+1}>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow -2x\sqrt{x^2+1}>0$

  Οπότε από **(1)** έχουμε

  $2x^2+1=-2x\cdot\sqrt{x^2+1}\Rightarrow\left(2x^2+1\right)^2=\left(-2x\cdot\sqrt{x^2+1}\right)^2\Rightarrow 4x^4+4x^2+1=4x^2\left(x^2+1\right)$

  Άρα η **(1) αδύνατη** δηλαδή δεν μηδενίζεται η f' οπότε $f'(x)\neq 0$

  Οπότε η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο δηλαδή η f είναι γνησίως μονότονη

Άρα f για κάθε $x\in R\Rightarrow f'(x)\neq 0$
Οπότε η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο δηλαδή η f είναι γνησίως μονότονη

Δ2.
Η f είναι γνησίως μονότονη $\Leftrightarrow$ f "$1-1$"

$f(x^3-x+1)=f(2) \Leftrightarrow 4x^4+4x^2+1=4x^2(x^2+1) \Leftrightarrow x^3-x-1=0$

Θέτουμε $\varphi(x)=x^3-x-1 \;\; x\in R$
Για την $\varphi(x)$ στο [1,3] έχουμε:

- Η φ συνεχής στο [1 , 3] ως πολυωνυμική
- $\left.\begin{aligned}\varphi(1)&=-1<0\\ \varphi(3)&=27-3-1=23>0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(1)\cdot\varphi(3)<0$

Από θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,3)$ ώστε :

$\varphi(x)=0 \Leftrightarrow f(x_0^3-x_0+1)=f(2)$

Δ3.

Για την f στο [1,2], [2,3], [1,3]

- η f συνεχής στο [1,2], [2,3], [1,3]
- η f παραγωγίσιμη στο (1,2), (2,3), (1,3)

Από ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1\in(1,2)$ $\xi_2\in(2,3)$ $\xi\in(1,3)$ ώστε

- $f'(\xi_1)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} \Rightarrow f'(\xi_1)=f(2)-f(1) \Rightarrow$
  $f'(\xi_1)=4+2\sqrt{5}-1-\sqrt{2} \Rightarrow$
  $f'(\xi_1)=3+2\sqrt{5}-\sqrt{2}$

- $f'(\xi_2)=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2} \Rightarrow$
  $f'(\xi_2)=f(3)-f(2) \Rightarrow$
  $f'(\xi_2)=3\left(3+\sqrt{10}\right)-2\left(2+\sqrt{5}\right) \Rightarrow$
  $f'(\xi_2)=5+3\sqrt{10}-2\sqrt{5}$

- $f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} \Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f(1)}{2} \Leftrightarrow 2f'(\xi)=f(3)-f(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f'(\xi)=3\left(3+\sqrt{10}\right)-\left(1+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow 2f'(\xi)=8+3\sqrt{10}-\sqrt{2}$

Είναι $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\left(3+2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\left(5+3\sqrt{10}-2\sqrt{5}\right)=8+3\sqrt{10}-\sqrt{2}$

Οπότε ισχύει $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2f'(\xi)$

Επιμέλεια :
Μυλωνίδης Σ. – Τάνης Σ. – Ηλιάδης Κ. – Μαργαριτέλη Ε. – Πασχαλίδου Ξ. – Σαμαρά Φ.