ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη βιβλίου σελ. 28
Α2. Ορισμός βιβλίου σελ. 14
Α3. Ορισμός βιβλίου σελ. 87
Α4. α) Λ
β) Σ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1 .

$$\gamma=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{x+6-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to 3}(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)=(3+3)\cdot\left(\sqrt{9}+3\right)=6\cdot 6=36$$

Άρα $\gamma=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3}=36$

Β2.

$f(x)=x^3-\alpha x^2+\beta x+\gamma$

$f'(x)=3x^2-2\alpha x+\beta$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=3-2\alpha+\beta \\ f'(1)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 3-2\alpha+\beta=0\Rightarrow -2\alpha+\beta=-3 \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{1}{9}-2\alpha\frac{1}{3}+\beta \\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{3}-\frac{2\alpha}{3}+\beta=0\Rightarrow -2\alpha+3\beta=-1 \quad (2)$$

Λύνουμε το (Σ) των (1) και (2):

$$\left.\begin{array}{l}-2\alpha+\beta=-3\\-2\alpha+3\beta=-1\end{array}\right\}\underset{\cdot(-1)}{\Rightarrow}\begin{array}{l}\cancel{-2\alpha}+\beta=-3\\\cancel{2\alpha}-3\beta=1\quad(+)\\\hline -2\beta=-2\Leftrightarrow\boxed{\beta=1}\end{array}$$

Άρα από (1) $\Rightarrow -2\alpha+1=-3\Leftrightarrow -2\alpha=-4\Leftrightarrow \boxed{\alpha=2}$

Β3.

$$f(x)=x^3-\alpha x^2+\beta x+\gamma \overset{\substack{\alpha=2\\ \beta=1\\ \gamma=36}}{\Rightarrow} f(x)=x^3-2x^2+x+36 \quad (1)$$

$$f'(x)=3x^2-4x+1 \quad (2)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-4x+1=0$$

$$\Delta=16-4\cdot3\cdot1=16-12=4>0$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm2}{6}=\begin{cases}\dfrac{4+2}{6}=1\\[2mm]\dfrac{4-2}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Τ.Μ		Τ.Ε		

- στο $x=\frac{1}{3}$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{3}\right)$ που είναι ίσο με

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+36=\frac{1}{27}-2\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+36=$$

$$=\frac{1}{27}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+36=\frac{1}{27}+\frac{6}{27}+\frac{9}{27}+36=\frac{10-6}{27}+36=\frac{14}{27}+\frac{36}{1}=\frac{4+972}{27}=\frac{976}{27}$$

- στο $x=1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1)$ που είναι ίσο με

$$f(1)=\cancel{1}-\cancel{2}+\cancel{1}+36\Rightarrow f(1)=36$$

ΘΕΜΑ Γ

$\kappa=4$ κλάσεις , $x_{min}=50$, $x_4=85$, $f_4=2f_3$, $\delta=75$, $\bar{x}=74$.

Γ1.

Οι κλάσεις θα είναι της μορφής:

[α , α+c)
[α+c , α+2c)
[α+2c , α+3c)
[α+3c , α+4c)

Είναι $x_{min} = \alpha = 50$

Είναι $x_4 = \dfrac{(\alpha+3c)+(\alpha+4c)}{2} \Leftrightarrow x_4 = \dfrac{2\alpha+7c}{2} \Leftrightarrow 85 = \dfrac{2\cdot 50+7c}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 170 = 100+7c \Leftrightarrow 7c = 70 \Leftrightarrow \boxed{c=10}$

Γ2.

- $f_1+f_2+f_3+f_4=1 \overset{f_4=2f_3}{\Leftrightarrow} f_1+f_2+f_3+2f_3=1 \Leftrightarrow f_1+f_2+3f_3=1$ **(1)**

- $\overline{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i f_i \Leftrightarrow \overline{x} = x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4 \Leftrightarrow 74 = 55f_1+65f_2+75f_3+85f_4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 74 = 55f_1+65f_2+75f_3+85\cdot(2f_3) \Leftrightarrow 74 = 55f_1+65f_2+75f_3+170f_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 74 = 55f_1+65f_2+245f_3$ **(2)**

- Είναι $\delta = 75$ Άρα $f_1+f_2+\dfrac{f_3}{2} = \dfrac{50}{100} \Leftrightarrow f_1+f_2+\dfrac{f_3}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2f_1+2f_2+f_3=1$ **(3)**

Λύνουμε το σύστημα των **(1)** **,** **(2)** **,** **(3)**

$$\left.\begin{array}{l} f_1+f_2+3f_3=1 \\ 55f_1+65f_2+245f_3=74 \\ 2f_1+2f_2+f_3=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_1+f_2=1-3f_3 \\ 55f_1+65f_2+245f_3=74 \\ 2(f_1+f_2)+f_3=1 \end{array}\right\}$$

$2(f_1+f_2)+f_3=1 \Leftrightarrow 2(1-3f_3)+f_3=1 \Leftrightarrow 2-6f_3+f_3=1 \Leftrightarrow 5f_3=1 \Leftrightarrow f_3=\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \boxed{f_3=0,2}$

Από **(1)** έχουμε :
$f_1+f_2+3f_3=1 \Leftrightarrow f_1+f_2+3\cdot 0,2=1 \Leftrightarrow f_1+f_2+0,6=1 \Leftrightarrow f_1+f_2=0,4 \Leftrightarrow f_1=0,4-f_2$ **(4)**

Από **(2)** έχουμε:
$55f_1+65f_2+245f_3=74 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} 55(0,4-f_2)+65f_2+245\cdot 0,2=74 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 22-55f_2+65f_2+49=74 \Leftrightarrow 10f_2=3 \Leftrightarrow \boxed{f_2=0,3}$

Από **(4)** έχουμε $f_1=0,4-0,3 \Leftrightarrow \boxed{f_1=0,1}$

Από **(1)** έχουμε $f_1+f_2+3f_3=1 \Leftrightarrow 0,1+0,3+0,2+f_4=1 \Leftrightarrow 0,6+f_4=1 \Leftrightarrow \boxed{f_4=0,4}$

Οπότε ο πίνακας γίνεται :

[,)	x_i	f_i
[50,60)	55	0,1
[60,70)	65	0,3
[70,80)	75	0,2
[80,90)	85	0,4
Σύνολο	----	1

Γ3.

Είναι $f_1 = \frac{v_1}{v} \Rightarrow v_1 = f_1 \cdot v \Rightarrow v_1 = 0,1 \cdot v$

Ομοίως : $v_2 = 0,3 \cdot v$ και $v_3 = 0,2 \cdot v$

Οπότε $\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v_1 + v_2 + v_3} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{55 v_1 + 65 v_2 + 75 v_3}{v_1 + v_2 + v_3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{55 \cdot 0,1 \cdot v + 65 \cdot 0,3 \cdot v + 75 \cdot 0,2 \cdot v}{0,1 \cdot v + 0,3 \cdot v + 0,2 \cdot v} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\cancel{v}\,(55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2)}{0,6 \cdot \cancel{v}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{5,5 + 19,5 + 15}{0,6} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{40}{0,6} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{20}{0,3} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{200}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f(x) = x^2 + \kappa + 1$, $x \in R$, $\kappa > 2$

Η εφαπτομένη (ε) έχει μορφή $\varepsilon : y = \lambda x + \beta$

$A(1, f(1)) \in C_f \Rightarrow y = f(1) \Rightarrow y = 1^2 + \kappa + 1 \Rightarrow y = \kappa + 2$

Είναι $f'(x) = 2x$

Οπότε $\lambda = f'(1) = 2$

Για $x = 1$ στην (ε) είναι $y = 2 \cdot 1 + \beta \Rightarrow \kappa + 2 = 2 + \beta \Rightarrow \beta = \kappa$

Οπότε η εφαπτομένη στο A(1, f(1)) είναι $\varepsilon : y = 2x + \kappa$

Σημείο τομής με τον x΄x

Για $y = 0$

$0 = 2x + \kappa \Rightarrow 2x = -\kappa \Rightarrow x = -\frac{\kappa}{2}$

Άρα το σημείο $A\left(-\frac{\kappa}{2},\ 0\right)$

Σημείο τομής με τον y΄y
Για $x = 0$

$y = 2\cdot 0 + \kappa \Rightarrow y = \kappa$

Άρα το σημείο $B(0\ ,\ \kappa)$

Είναι $E = \frac{1}{2}(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left|-\frac{\kappa}{2}\right|\cdot|\kappa| = \frac{1}{2}\frac{|\kappa|\cdot|\kappa|}{2} = \frac{1}{4}|\kappa|^2 = \frac{1}{4}\kappa^2$

Πρέπει $E < 4 \Rightarrow \frac{1}{4}\kappa^2 < 4 \Rightarrow \kappa^2 < 16 \Rightarrow |\kappa| < 4 \Rightarrow \left.\begin{cases} -4 < \kappa < 4 \\ \text{και αφού } \kappa > 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow 2 < \kappa < 4\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow \kappa = 3$

Δ2.
α)

$x_1, x_2, ..., x_{50}$

$y_1, y_2, ..., y_{50}$

(ε): $y = 2x + 3$

Γνωρίζουμε ότι $\overline{y} = 63$

Με βάση εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (σελ 99) θα ισχύει ότι
$\overline{y} = 2\overline{x} + 3 \Rightarrow 63 = 2\overline{x} + 3 \Rightarrow 2\overline{x} = 60 \Rightarrow \overline{x} = 30$

β)

$$\begin{array}{cccccc} x_1, \ldots\ldots, & x_{20}, & x_{21}, \ldots, & x_{35}, & x_{36}, \ldots\ldots, & x_{50} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ z_1 = x_1 + 3, \ldots, & z_{20} = x_{20} + 3, & z_{21}, \ldots, & z_{35}, & z_{36} = x_{36} - \lambda, \ldots, & z_{50} = x_{50} - \lambda \end{array}$$

Η νέα μέση τιμή είναι

$$\overline{x}' = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_{50}}{50} \Leftrightarrow 31 = \frac{x_1 + 3 + \ldots + x_{20} + 3 + x_{21} + \ldots + x_{35} + x_{36} - \lambda + \ldots + x_{50} - \lambda}{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31 = \frac{x_1 + \ldots + x_{50} + 20\cdot 3 + 15\cdot(-\lambda)}{50} \Leftrightarrow 31 = \frac{x_1 + \ldots + x_{50} + 60 - 15\lambda}{50} \quad \textbf{(1)}$$

Είναι $\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_{50}}{50} \Leftrightarrow x_1 + \ldots + x_{50} = 50\cdot 30 \Leftrightarrow x_1 + \ldots + x_{50} = 1500$

Οπότε από την **(1)** έχουμε $31\cdot 50 = 1500 + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow 1550 = 1500 + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15\lambda = 1560 - 1550 \Leftrightarrow 15\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{10}{15} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

Δ3.

$0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6$, $f(x) = x^2 + 4$

$f(\alpha) = \alpha^2 + 4$
$f(\beta) = \beta^2 + 4$
$f(\gamma) = \gamma^2 + 4$
$f(1) = 1 + 4 = 5$
Είναι $f'(x) = 2x$ οπότε $f'(0) = 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
$f'(x) > 0 \Rightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘		↗

Επειδή στο x = 0 η f έχει ολικό ελάχιστο ισχύει $f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 4 \Rightarrow f(x) > 0$
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για x > 0
$0<\alpha<\beta<\gamma<1 \overset{f\ \gamma\nu.\ \alpha\upsilon\xi.}{\Rightarrow} f'(0) = 0 < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(1) = 5$

Το εύρος είναι $R = f(1) - f'(0) \Leftrightarrow R = 5 - 0 \Leftrightarrow R = 5$

Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \dfrac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(1) + f(0)}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \dfrac{\alpha^2 + 4 + \beta^2 + 4 + \gamma^2 + 4 + 5 + 0}{5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \dfrac{\overbrace{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}^{6} + 3 \cdot 4 + 5}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \dfrac{6 + 12 + 5}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \dfrac{23}{5}$$

Επιμέλεια
Μυλωνίδης Σ. - Τάνης Σ. - Ηλιάδης Κ. - Μαργαριτέλη Ε. - Πασχαλίδου Ξ. - Σαμαρά Φ.