



σύγχρονο

ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΙΟΥ 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1 σελ. 253

A2 σελ. 191

A3 σελ. 258

A4

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β.

B1.

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \stackrel{(z=x+yi)}{\Rightarrow} |x+yi-1|^2 + |x+yi+1|^2 = 4$$

$$|(x-1)+yi|^2 + |(x+1)+yi|^2 = 4 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4$$

$$2x^2 + 2y^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Άρα ο γ.τ. των $M(z)$ είναι κύκλος με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho=1$

(δηλ. $|z|^2 = 1 \Rightarrow |z|=1$)

B2.

$$\text{Ισχύει ότι } |z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = 2 \Rightarrow z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = 2 \stackrel{(|z_1|=|z_2|=1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 = 2 \Rightarrow \cancel{1} - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + \cancel{1} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0 \quad (1)$$

Για το $|z_1 + z_2|$ έχουμε

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1\overline{z_1} + \cancel{z_1\overline{z_2}} + \cancel{\overline{z_1}z_2} + z_2\overline{z_2} \stackrel{(1)}{=} |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 + 1 = 2$$

Άρα $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$



σύγχρονο

ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

B3.

$$|w - 5\bar{w}| = 12 \xrightarrow{w=x+yi} |(x+yi) - 5(x-yi)| = 12 \Rightarrow$$

$$|x+yi - 5x+5yi| = 12 \Rightarrow |-4x+6yi| = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-4x+6yi|^2 = 12^2 \Rightarrow (-4x)^2 + (6y)^2 = 144 \Rightarrow$$

$$16x^2 + 36y^2 = 144 \Rightarrow \frac{16x^2}{144} + \frac{36y^2}{144} = \frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Άρα προκύπτει έλλειψη με :

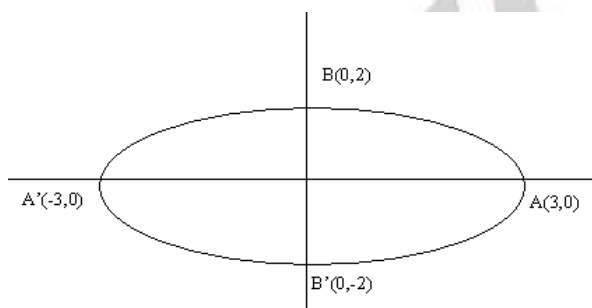
$$\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = 2$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{9-4} \Rightarrow \gamma = \sqrt{5}$$

Εστίες $E(\sqrt{5}, 0)$, $E'(-\sqrt{5}, 0)$

Κορυφές $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$, $B(0, 2)$, $B'(0, -2)$



οπότε

$$|w|_{\max} = (OA) = (OA') = 3$$

$$|w|_{\min} = (OB) = (OB') = 2$$

B4.

Είναι $|z - w| = |z + (-w)|$

Από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$||z| - |-w|| \leq |z - w| = |z + (-w)| \leq |z| + |-w| \Leftrightarrow$$

$$||z| - |w|_{\min}| \leq |z - w| \leq |z| + |w|_{\max} \Leftrightarrow$$

$$|1 - 2| \leq |z - w| \leq 1 + 3 \Leftrightarrow$$

$$1 \leq |z - w| \leq 4$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = (x-1)\ln x - 1, \quad x > 0$$

Γ1.

$$f'(x) = (x-1)' \ln x + (x-1)(\ln x)' = \ln x + (x-1) \frac{1}{x} = \frac{x \ln x + x - 1}{x}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ προφανής ρίζα}$$

- Για $x > 1$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \text{Για } x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln 1 \Rightarrow \ln x > 0 \\ \text{Για } x > 1 \Rightarrow x > 0 \\ \text{Για } x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \end{array} \right\} x \ln x > 0 \Rightarrow$$



$$x \ln x + x - 1 > 0 \stackrel{(x>0)}{\Rightarrow} \frac{x \ln x + x - 1}{x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

- Για $0 < x < 1$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \text{Για } x < 1 \Rightarrow \ln x < \ln 1 \Rightarrow \ln x < 0 \\ \text{Για } 0 < x < 1 \Rightarrow x > 0 \\ \text{Για } 0 < x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \end{array} \right\} x \ln x < 0 \Rightarrow$$

$$x \ln x + x - 1 < 0 \stackrel{(x>0)}{\Rightarrow} \frac{x \ln x + x - 1}{x} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ για κάθε } 0 < x < 1$$

Άρα έχουμε:

x	0	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)			

Οπότε η f γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$

και η f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Θεωρούμε $A_1 = (0, 1]$ και $A_2 = [1, +\infty)$ και $A = (0, +\infty)$

Είναι $A = A_1 \cup A_2 \Rightarrow f(A) = f(A_1) \cup f(A_2)$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ γνησ. φθίνουσα στο } A_1 \\ f \text{ συνεχής στο } A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [-1, +\infty)$$

$$\text{Όπου } f(1) = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1)\ln x - 1] = +\infty$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ γνησ. αύξουσα στο } A_2 \\ f \text{ συνεχής στο } A_2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [-1, +\infty)$$

$$\text{Όπου } f(1) = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1) \ln x - 1] = +\infty$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\text{Άρα } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-1, +\infty)$$

Β' Τρόπος (για την μονοτονία)

$$f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} > 0 \text{ (επειδή } x > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \text{)}. \text{ Άρα η } f' \text{ γνησ. αύξουσα}$$

$$\text{Για } x=1 \text{ είναι } f'(1) = 0$$

$$\text{για } x > 1 \xrightarrow{f' \text{ γν. αυξ.}} \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ γν. αύξουσα}$$

$$\text{για } x < 1 \xrightarrow{f' \text{ γν. αυξ.}} \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ γν. φθίνουσα}$$

Γ2.

Είναι για $x > 0$:

$$\begin{aligned} x^{x-1} = e^{2013} &\Rightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Rightarrow (x-1) \ln x = 2013 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x-1) \ln x - 2013 = 0 \Rightarrow \underbrace{(x-1) \ln x - 1 - 2012}_{f(x)} = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) - 2012 = 0 \Rightarrow f(x) = 2012$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Το } 2012 \in f(A_1) \\ f \text{ γν. φθίν. στο } A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{υπάρχει μοναδικό } x_1 \in A_1 = (0, 1] \text{ ώστε } f(x_1) = 2012$$

$$(x_1 \neq 1, \text{ επειδή } f(1) = -1 \neq 2012)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Το } 2012 \in f(A_2) \\ f \text{ γν. αυξ. στο } A_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{υπάρχει μοναδικό } x_2 \in A_2 = [1, +\infty) \text{ ώστε } f(x_2) = 2012$$

$$(x_2 \neq 1, \text{ επειδή } f(1) = -1 \neq 2012)$$

Άρα, η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες $x_1 \in (0, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$

Γ3.

Θεωρούμε $h(x) = f'(x) + f(x) - 2012$

Για την h στο $[x_1, x_2]$ έχουμε:

- h συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- $h(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 < 0$ (επειδή $x_1 \in (0, 1)$)
- $h(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 > 0$ (επειδή $x_2 \in (1, +\infty)$)

Άρα $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$

Οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε :

$$h(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

Γ4.

Θα βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης

$$g(x) = 0 \Rightarrow f(x) + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = -1$$

Ακόμη έχουμε $g'(x) = f'(x)$

Για $x = 1$ ισχύει η εξίσωση και είναι μοναδική ρίζα γιατί:

- Στο $(0, 1]$ η $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ και επειδή η g έχει την ίδια μονοτονία με την f και f γν. φθίνουσα άρα και η g γν. φθίνουσα οπότε η ρίζα μοναδική.
- Στο $[1, +\infty)$ η $x = 1$ ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ και επειδή η g έχει την ίδια μονοτονία με την f και f γν. αύξουσα άρα και η g γν. αύξουσα οπότε η ρίζα μοναδική.

$$\text{Άρα } E = \int_1^e |g(x)| dx = \int_1^e |f(x) + 1| dx = \int_1^e |(x-1) \ln x - 1| dx = \int_1^e |(x-1) \ln x| dx = (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \\ x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln 1 \Rightarrow \ln x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x-1) \ln x > 0$$

Από (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_1^e (x-1) \ln x dx &= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)' \ln x dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right) (\ln x)' dx = \\ &= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \frac{1}{x} dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x \ln x \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} - x \right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} - e\right) \ln e^1 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) \ln 1^0 - \left[\left(\frac{e^2}{4} - e\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)\right] = \\ &= \left(\frac{e^2}{2} - e\right) \cdot 1 - \frac{e^2}{4} + e + \frac{1}{4} - 1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1.

$$f(x) \neq 0, \text{ συνεχής, } \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e} \text{ και } \ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right) |f(x)|$$

$$\text{Έστω } h(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e} \geq 0$$

Η $\frac{x-x^2}{e}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα το $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt$ παραγωγίσιμο στο $(0, +\infty)$

Η $x^2 - x + 1$ παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

$$\text{Για } x = 1 \text{ είναι } h(1) = \int_1^{1^2-1+1} f(t)dt - \frac{1-1^2}{e} = \int_1^1 f(t)dt - 0 = 0$$

Άρα $h(x) \geq h(1)$ για κάθε $x > 0$ οπότε η h παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ελάχιστο και επειδή η h παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, από θεώρημα Fermat προκύπτει $h'(1) = 0$

$$\text{Έχουμε } h'(x) = \left(\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt\right)' - \left(\frac{x-x^2}{e}\right)' = f(x^2-x+1)(2x-1) - \frac{1-2x}{e}$$

Για $x = 1$ έχουμε

$$h'(1) = 0 \Rightarrow f(1^2-1+1)(2 \cdot 1 - 1) - \frac{1-2 \cdot 1}{e} = 0 \Rightarrow f(1) - \frac{-1}{e} = 0 \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$$

Επειδή f συνεχής και $f(x) \neq 0$ στο $(0, +\infty)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο

στο $(0, +\infty)$ και επειδή $f(1) = -\frac{1}{e}$ άρα $f(x) < 0$

Επειδή $f(x) < 0$ έχουμε $|f(x)| = -f(x)$

$$\text{Οπότε είναι } \ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right) \cdot f(x) \quad (1)$$

Η $\ln x - x$ συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών.

Η $f(x)$ συνεχής στο $(0, +\infty)$ οπότε ο λόγος $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών άρα

και το $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt$ παραγωγίσιμο

Έχουμε από την (1) και επειδή $f(x) < 0$

$$\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e$$

Επειδή $\ln x - x \leq -1$ για κάθε $x > 0$ άρα $\ln x - x < 0$ και $f(x) < 0$

Είναι $\frac{\ln x - x}{f(x)} > 0$ οπότε και $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e > 0$ (Άρα $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \neq 0$)

Οπότε τελικά η $f(x) = \frac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e}$ είναι παραγωγώσιμη ως ηλίκο

παραγωγώσιμων συναρτήσεων

$$\begin{aligned} \ln x - x &= \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) f(x) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Rightarrow} \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{\ln x - x}{f(x)} \right)' = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right)' \Rightarrow \left(\frac{\ln x - x}{f(x)} \right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)} \end{aligned}$$

Απο εφαρμογή σελ. 252 είναι $\frac{\ln x - x}{f(x)} = c \cdot e^x$

$$\text{Για } x=1 \text{ είναι } \frac{\ln 1 - 1}{f(1)} = c \cdot e \Rightarrow \frac{-1}{-\frac{1}{e}} = c \cdot e \Rightarrow e = c \cdot e \Rightarrow c = 1$$

Άρα

$$\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Rightarrow \ln x - x = e^x \cdot f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x - x}{e^x} \Rightarrow f(x) = e^{-x} (\ln x - x), x > 0$$

Δ2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f^2(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \left[f(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} - 1 \right] \stackrel{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \left(\frac{\eta\mu \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} - 1 \right) = (1)$$

$$\text{Έχουμε } \frac{1}{f(x)} = t$$

$$\text{όταν } x \rightarrow 0^+ \text{ τότε } t \rightarrow t_0 \text{ όπου } t_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\ln x - x} = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x) = -\infty \right)$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu t}{t} = 1$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - x}{e^x} = -\infty$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1$$

Άρα στην (1) προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $(-\infty) \cdot 0$

Οπότε η (1) γίνεται

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu \frac{1}{f(x)} - 1}{\frac{1}{f(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu \frac{1}{f(x)} - 1}{\frac{1}{f(x)}} \stackrel{\text{θέτω } \frac{1}{f(x)} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu t - t}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu t - t}{t^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu t - 1}{2t} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu t}{2} = 0 \end{aligned}$$

Δ3.

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$$

Η $F(x)$ παραγωγώσιμη επειδή η $f(t)$ συνεχής στο $(0, +\infty)$, άρα η $F(x)$ συνεχής

$$F'(x) = f(x) = e^{-x}(\ln x - x) < 0$$

$$\text{διότι } e^{-x} > 0 \text{ και για } x > 0 \text{ είναι } \ln x \leq x - 1 \Rightarrow \ln x - x \leq -1 \Rightarrow \ln x - x < 0$$

Άρα η $F(x)$ γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

$$F''(x) = f'(x) = -e^{-x}(\ln x - x) + e^{-x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = e^{-x} \left(-\ln x + x + \frac{1}{x} - 1 \right)$$

Για $x > 0$ έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \ln x \leq x - 1 &\Rightarrow x - 1 - \ln x \geq 0 \\ \text{Είναι } x > 0 &\Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\ln x + x + \frac{1}{x} - 1 > 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Το } e^{-x} &> 0 \\ \text{και } -\ln x + x + \frac{1}{x} - 1 &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^{-x} \left(-\ln x + x + \frac{1}{x} - 1 \right) > 0 \Rightarrow F''(x) > 0$$

Άρα $F''(x) > 0$ οπότε $F(x)$ κυρτή στο $(0, +\infty)$

$$\text{Έχουμε } F(x) + F(3x) > 2F(2x) \Leftrightarrow F(x) + F(3x) > F(2x) + F(2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(3x) - F(2x) > F(2x) - F(x)$$

Η $F(x)$ συνεχής στο $[x, 2x]$

Η $F(x)$ παραγωγώσιμη στο $(x, 2x)$

Απο Θ.Μ.Τ στο $(x, 2x)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x, 2x)$

$$\text{ώστε } F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} \Rightarrow F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$$

Η $F(x)$ συνεχής στο $[2x, 3x]$

Η $F(x)$ παραγωγίσιμη στο $(2x, 3x)$

Απο Θ.Μ.Τ στο $(2x, 3x)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (2x, 3x)$

$$\text{ώστε } F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} \Rightarrow F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$

Επειδή η $F(x)$ κυρτή άρα η $F'(x)$ γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Έχουμε $\xi_1 \in (x, 2x)$ και $\xi_2 \in (2x, 3x)$ οπότε $x < \xi_1 < 2x < \xi_2 < 3x$

$$\text{Άρα για } \xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{F' \text{ γν. αυξ.}} F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Rightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(x>0)}{\Rightarrow} F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Rightarrow F(2x) + F(2x) < F(3x) - F(x) \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2F(2x) < F(3x) - F(x) \end{aligned}$$

Δ4.

Έχουμε $F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi) \Leftrightarrow 2F(\xi) - F(\beta) - F(3\beta) = 0$

Έστω η $g(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$

- $g(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$

$$\text{Διότι } \beta < 3\beta \xrightarrow{F \text{ γν. φθ}} F(\beta) > F(3\beta) \Rightarrow F(\beta) - F(3\beta) > 0$$

- $g(2\beta) = F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$

$$\begin{aligned} & \text{Διότι } F(x) + F(3x) > 2F(2x) \xrightarrow{x=\beta} F(\beta) + F(3\beta) > 2F(2\beta) \Rightarrow \\ & \Rightarrow 0 > 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) \end{aligned}$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\beta, 2\beta)$ ώστε $g(\xi) = 0$

Επειδή $g'(x) = 2F'(x) < 0$ άρα η g γν. φθίνουσα, άρα είναι «1-1»

Οπότε η ρίζα μοναδική. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ ώστε

$$g(\xi) = 0 \Rightarrow 2F(\xi) - F(\beta) - F(3\beta) = 0 \Rightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$$

Επιμέλεια :

Μυλωνίδης Σ. – Τάνης Α. – Ηλιάδης Κ. –

Μαργαριτέλη Ε. – Πασχαλίδου Ξ. – Σαμαρά Φ.