Τετάρτη 23 Μαΐου 2012
Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Ημερήσιων Λυκείων
Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ. 31 Βιβλίο
Α2. Θεωρία σελ 148
Α3. σελ. 96-97
Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.
Επειδή $F_2\% = 50\% \Rightarrow \delta = 25$

Β2.
Είναι $c = \frac{R}{K} = \frac{45-5}{4} = \frac{40}{4} = 10$ οπότε οι κλάσσεις γίνονται $[5,15),[15,25)$ κλπ
Είναι $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = \alpha + 4 + 3\alpha - 6 + 2\alpha + 8 + \alpha - 2 = 7\alpha + 4$

Είναι $N_2 = \alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 4\alpha - 2$
Οπότε $F_2 = \frac{N_2}{\nu} \Rightarrow 0,5 = \frac{4\alpha - 2}{7\alpha + 4} \Rightarrow 4\alpha - 2 = 3,5\alpha + 2 \Rightarrow 0,5\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{0,5} \Rightarrow \alpha = 8$

Άρα ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις	X_i	V_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο	-	60	100	-	-

Β3.

Μέση Τιμή
$$\overline{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = \frac{10\cdot 12 + 20\cdot 18 + 30\cdot 24 + 40\cdot 6}{60} = \frac{120+360+720+240}{60} = \frac{1440}{60} = 24\,\text{min}$$

Διακύμανση

$$s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\nu_i=\frac{(10-24)^2\cdot 12+(20-24)^2\cdot 18+(30-24)^2\cdot 24+(40-24)^2\cdot 6}{60}=$$

$$=\frac{196\cdot 12+16\cdot 18+36\cdot 24+256\cdot 6}{60}=\frac{5040}{60}=84$$

Τυπική απόκλιση $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{84}\simeq 9{,}17$

B4.

Θεωρούμε ότι η κατανομή είναι ομοιόμορφη

Στο διάστημα $[35,45)$ πλάτους 10 έχουμε 10%

Στο διάστημα $[37,45)$ πλάτους 8 έχουμε $x\%$

$$x=\frac{10\cdot 8}{10}=8\%$$

ΘΕΜΑ Γ

$\nu\geq 3$

Έστω $P(\Gamma)=\dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$, $P(I)=\dfrac{\nu+2}{\nu^2+1}$, $P(\Gamma\cap I)=\dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$

Γ1.

$$P(\Gamma\cup I)=\lim_{x\to-1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}=\lim_{x\to-1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{2\left(\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-2^2\right)}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{2\left(x^2+3-4\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{2\left(x^2-1\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{2(-1-1)}{-1\left(\sqrt{(-1)^2+3}+2\right)}=\frac{-4}{-1\cdot 4}=1$$

Εφόσον $P(\Gamma\cup I)=1=P(\Omega)$ Άρα είναι βέβαιο ενδεχόμενο

Γ2.

$P(\Gamma\cup I)=P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap I)$

$$1=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\Rightarrow 1=\frac{3\nu+\cancel{\nu}+2-\cancel{\nu}-1}{\nu^2+1}\Rightarrow 1=\frac{3\nu+1}{\nu^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu^2+1=3\nu+1 \Rightarrow \nu^2-3\nu=0 \Rightarrow \nu(\nu-3)=0 \begin{cases} \nu=0 \text{ απορρίπτεται διότι } \nu\geq 3 \\ \nu-3=0 \Rightarrow \nu=3 \end{cases}$$

Γ3.
Έχουμε

$$P(\Gamma)=\frac{3\nu}{\nu^2+1}\overset{\nu=3}{=}\frac{9}{10} \quad , \quad P(I)=\frac{\nu+2}{\nu^2+1}\overset{\nu=3}{=}\frac{5}{10} \quad , \quad P(\Gamma\cap I)=\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\overset{\nu=3}{=}\frac{4}{10}$$

Άρα

$$P((\Gamma-I)\cup(I-\Gamma))=P(\Gamma-I)+P(I-\Gamma)=P(\Gamma)+P(I)-2P(\Gamma\cap I)=\frac{9}{10}+\frac{5}{10}-2\cdot\frac{4}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Γ4.

$$\left.\begin{aligned} N(\Gamma\cap I)&=32 \\ P(\Gamma\cap I)&=\frac{N(\Gamma\cap I)}{N(\Omega)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{4}{10}=\frac{32}{N(\Omega)} \Rightarrow 4N(\Omega)=10\cdot 32 \Rightarrow N(\Omega)=\frac{10\cdot 32}{4}=80$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x)=\frac{1+\ln^2 x}{x}$$

Δ1.

$$f'(x)=\frac{(1+\ln^2 x)'\cdot x-(1+\ln^2 x)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{(2\ln x\cdot(\ln x)')\cdot x-(1+\ln^2 x)}{x^2}$$

$$=\frac{(2\ln x\cdot\frac{1}{x})\cdot x-1-\ln^2 x}{x^2}=\frac{2\ln x-1-\ln^2 x}{x^2}=\frac{-(\ln^2 x-2\ln x+1)}{x^2}=-\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}=0 \Rightarrow \ln x-1=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e$$

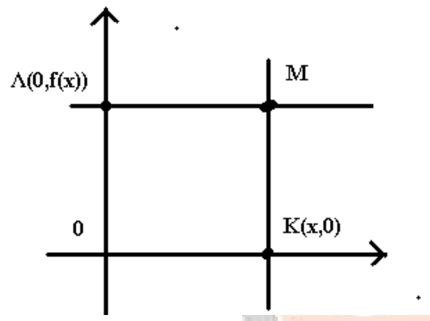
$$f'(x)>0 \Rightarrow -\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}>0 \Rightarrow -(\ln x-1)^2>0 \text{ αδύνατο γιατί } -(\ln x-1)^2\leq 0$$

Οπότε

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↘	

Άρα η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα

Δ2.



Το εμβαδό του ΟΚΜΛ είναι

$E(x)=(OK)\cdot(O\Lambda)=x\cdot f(x)=x\dfrac{1+\ln^2 x}{x}=1+\ln^2 x$

$E'(x)=0\Rightarrow\dfrac{2\ln x}{x}=0\overset{x>0}{\Rightarrow}2\ln x=0\Rightarrow\ln x=0\Rightarrow x=1$

$E'(x)>0\Rightarrow\dfrac{2\ln x}{x}>0\overset{x>0}{\Rightarrow}2\ln x>0\Rightarrow\ln x>0\Rightarrow x>1$

x	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			T.E		

Άρα για x=1 το εμβαδό γίνεται ελάχιστο οπότε είναι (ΟΚ)=1

Και $(O\Lambda)=f(1)=\dfrac{1+\ln^2 1}{1}=\dfrac{1+0}{1}=1$

Άρα (ΟΚ)=(ΟΛ) και έχουμε ότι το εμβαδό γίνεται ελάχιστο όταν έχουμε τετράγωνο

Δ3.

$\varepsilon: y=\lambda x+\beta \quad \beta\neq 10$

εφαπτ. στο $\Sigma(1,f(1))\rightarrow\lambda_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau}=f'(1)=-1$

$f'(1)=-\dfrac{(\ln 1-1)^2}{1^2}=-\dfrac{(0-1)^2}{1}=-1$

Άρα $\lambda_{\varepsilon}=\lambda_{\varepsilon\varphi}=-1$ οπότε $\varepsilon: y=-x+\beta$

$x_1, x_2, \ldots\ x_{10} \to \overline{x} = 10 \quad Sx = 2$

$\downarrow\ \downarrow \qquad \downarrow$

$y_1, y_2, \ldots\ y_{10} \to \overline{y} = -\overline{x} + \beta \quad , \quad Sy = Sx = 2$

$$CV_y \le 10 \Rightarrow \frac{Sy}{|\overline{y}|} \cdot 100 \le 10 \Rightarrow \frac{2}{|-10+\beta|} \cdot 100 \le 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 100 \le 10|\beta - 10| \overset{:10}{\Rightarrow} 2 \cdot 10 \le |\beta - 10| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 \le |\beta - 10| \Rightarrow |\beta - 10| \ge 20 \Rightarrow \begin{cases} \beta - 10 \ge 20 \Rightarrow \beta \ge 30 \\ \beta - 10 \le -20 \Rightarrow \beta \le -10 \end{cases}$$

Άρα για κάθε $\beta \in (-\infty, -10] \cup [30, +\infty)$ το δείγμα είναι ομοιογενές.

Δ4.

Είναι $A \ne \varnothing$ και $A \cap B \ne \varnothing$

$$A \cap B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \le P(A \cup B) \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu.}{\Rightarrow} f(P(A \cap B)) \ge f(P(A \cup B)) \quad (1)$$

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A) \le P(A \cup B) \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu.}{\Rightarrow} f(P(A)) \ge f(P(A \cup B)) \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει $f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \ge 2f(P(A \cup B))$
Δηλαδή το ζητούμενο.

Επιμέλεια :
Μυλωνίδης Σ. – Τάνης Α. – Ηλιάδης Κ. – Μαργαριτέλη Ε. – Πασχαλίδου Ξ. – Σαμαρά Φ.