ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΙΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α
Α1 σελ. 253
Α2 σελ. 191
Α3 σελ 258
Α4
α) Σ
β) Σ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Λ

ΘΕΜΑ Β.

Β1.

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \overset{(z=x+yi)}{\Rightarrow} |x+yi-1|^2+|x+yi+1|^2=4$$
$$|(x-1)+yi|^2+|(x+1)+yi|^2=4 \Rightarrow (x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=4$$
$$x^2-\cancel{2x}+1+y^2+x^2+\cancel{2x}+1+y^2=4$$
$$2x^2+2y^2=2 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

Άρα ο γ.τ. των Μ(z) είναι κύκλος με κέντρο το Ο(0,0) και ρ=1(δηλ. $|z|^2=1 \Rightarrow |z|=1$)

Β2.

$$|z_1-z_2|=\sqrt{2}$$
$$|z_1+z_2|=;$$

- $|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Rightarrow |z_1-z_2|^2=2$

  $(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=2 \Rightarrow z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=2 \overset{(|z_1|=|z_2|=1)}{\Rightarrow}$
  $|z_1|^2-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+|z_2|^2=2 \Rightarrow \cancel{1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+\cancel{1}=\cancel{2} \Rightarrow$
  $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0 \quad (1)$

- $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+\cancel{z_1\overline{z_2}}+\cancel{\overline{z_1}z_2}+z_2\overline{z_2}\overset{(1)}{=}$
  $=|z_1|^2+|z_2|^2=1+1=2$

Άρα $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$

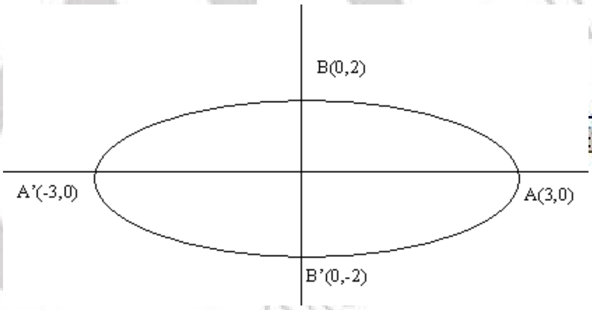
B3.

$$|w - 5\bar{w}| = 12 \overset{w=x+yi}{\Rightarrow}$$
$$|(x+yi) - 5(x-yi)| = 12 \Rightarrow$$
$$|(x+yi) - 5x + 5yi| = 12 \Rightarrow$$
$$|-4x + 6yi| = 12$$
$$|-4x + 6yi|^2 = 12^2 \Rightarrow$$
$$(-4x)^2 + (6y)^2 = 144 \Rightarrow$$
$$16x^2 + 36y^2 = 144 \Rightarrow$$
$$\frac{16x^2}{144} + \frac{36y^2}{144} = \frac{144}{144} \Rightarrow$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

άρα προκύπτει έλλειψη με:

$$\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$$
$$\beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = 2$$
$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{9-4} \Rightarrow \gamma = \sqrt{5}$$

Εστίες E($\sqrt{5}$,0) E'(-$\sqrt{5}$,0)
Κορυφές A(3,0) A'(-3,0) B(0,2) B'(0,-2)



οπότε
$|w|_{max}$=(OA)=(OA')=3
$|w|_{min}$ =(OB)=(OB')=2

Β4.

Είναι $|z-w|=|z+(-w)|$

Από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$||z|-|-w||\le|z-w|=|z+(-w)|\le|z|+|-w|\Leftrightarrow$$

$$\left||z|-|w|_{min}\right|\le|z-w|\le|z|+|w|_{max}\Leftrightarrow$$

$$|1-2|\le|z-w|\le1+3\Leftrightarrow$$

$$1\le|z-w|\le4$$

ΘΕΜΑ Γ

$f(x)=(x-1)\ln x-1,\ \ x>0$

Γ1.

$$f'(x)=(x-1)'\ln x+(x-1)(\ln x)'=$$

$$=\ln x+(x-1)\frac{1}{x}=\frac{x\ln x+x-1}{x},\quad x>0$$

$f'(x)=0\Rightarrow x=1$ προφανής ρίζα

Για x > 1 έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Για}\ \ x>1\Rightarrow\ln x>\ln1\Rightarrow\ln x>0\\ \text{Για}\ \ x>1\Rightarrow x>0\end{array}\right\}x\ln x>0\\ \text{Για}\ \ x>1\Rightarrow x-1>0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$x\ln x+x-1>0\overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{x\ln x+x-1}{x}>0\Rightarrow$$

$f'(x)>0$ για κάθε $x>1$

Για 0<x<1 έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\ln x<\ln1\Rightarrow\ln x<0\\ 0<x<1\Rightarrow x>0\end{array}\right|\Rightarrow x\ln x<0$$

$$0<x<1\Rightarrow x-1<0$$

$$\Rightarrow x\ln x+x-1<0\overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{x\ln x+x-1}{x}<0\Rightarrow$$

$f'(x)<0$ για κάθε $0<x<1$

Άρα έχουμε:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f\downarrow (0,1]$ και $f\uparrow [1,+\infty)$

Θεωρούμε $A_1=(0,1]$ και $A_2=[1,+\infty)$ και $A=(0,+\infty)$

Είναι $A=A_1\cup A_2 \Rightarrow f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)$

$$\left.\begin{array}{l} f\downarrow A_1 \\ f \text{ συνεχής στο } A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(A_1)=[f(1),\lim_{x\to 0^+} f(x))=[-1,+\infty)$$

Όπου $\begin{array}{l} f(1)=-1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}[(x-1)\ln x-1]=+\infty \end{array}$

επειδή $\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1 \\ \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \end{array}$

$$\left.\begin{array}{l} f\uparrow A_2 \\ f \text{ συνεχής στο } A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(A_2)=[f(1),\lim_{x\to +\infty} f(x)=[-1,+\infty)$$

Όπου $\begin{array}{l} f(1)=-1 \\ \lim_{x\to \infty^+} f(x)=\lim_{x\to \infty^+}[(x-1)\ln x-1]=+\infty \end{array}$

Επειδή $\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+}(x-1)=+\infty \\ \lim_{x\to 0^+}\ln x=+\infty \end{array}$

Άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=[-1,+\infty)$

Β' τρόπος

$f'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x+1}{x^2}>0 \Rightarrow f'\uparrow$

$x>0 \Rightarrow x+1>0$

Για $x=1,\ f'(1)=0$

$$x>0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1) \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow$$

$$0<x<1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1) \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow$$

Γ2.

Είναι για x>0:

$x^{x-1}=e^{2013} \Rightarrow$

$\ln x^{x-1}=\ln e^{2013} \Rightarrow$

$(x-1)\ln x=2013\ln e \Rightarrow$

$(x-1)\ln x=2013 \Rightarrow$

$(x-1)\ln x-2013=0 \Rightarrow$

$(x-1)\ln x-1-2012=0 \Rightarrow$

$f(x)-2012=0 \Rightarrow$

$f(x)=2012$

Το $\left.\begin{array}{l} 2012\in f(A_1) \\ f\downarrow A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in A_1=(0,1]$ ώστε $f(x_1)=2012$,

$(x_1\neq 1,$ επειδή $f(1)=-1\neq 2012)$

Το $\left.\begin{array}{l} 2012\in f(A_1) \\ f\uparrow A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ υπάρχει μοναδικό $x_2\in A_2=[1,+\infty)$ ώστε $f(x_2)=2012$,

$(x_2\neq 1,$ επειδή $f(1)=-1\neq 2012)$

Άρα, η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες $x_1\in(0,1)$ και $x_2\in(1,+\infty)$

Γ3.

Θεωρούμε $h(x)=f'(x)+f(x)-2012$

Για την h στο $[x_1,x_2]$ έχουμε:

- h συνεχής στο $[x_1,x_2]$
- $h(x_1)=f'(x_1)+\cancel{f(x_1)-2012}=f'(x_1)<0$ (επειδή $x_1\in(0,1)$)

  $h(x_2)=f'(x_2)+\cancel{f(x_2)-2012}=f'(x_2)>0$ (επειδή $x_2\in(1,+\infty)$)

Άρα $h(x_1)\cdot h(x_2)<0$

Οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(x_1,x_2)$ ώστε:

$h(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$

Γ4.

Θα βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης
$g(x)=0 \Rightarrow f(x)+1=0 \Rightarrow f(x)=-1$
Ακόμη έχουμε $g'(x)=f(x)$
Για x=1 ισχύει η εξίσωση και είναι μοναδική γιατί:

- Στο $(0,1]$ η x=1 είναι ρίζα της εξίσωσης g(x)=0 και επειδή η g έχει την ίδια μονοτονία με την f και $f\downarrow$ άρα $g\downarrow$ άρα η ρίζα μοναδική.
- Στο $[1,+\infty)$ η x=1 ρίζα της εξίσωσης g(x)=0 και επειδή η g έχει την ίδια μονοτονία με την f και $f\downarrow$ άρα $g\downarrow$ άρα η ρίζα μοναδική.

Άρα $E=\int_1^e |g(x)|dx=\int_1^e |f(x)+1|dx=\int_1^e \left|(x-1)\ln x \cancel{-1} \cancel{+1}\right|dx=\int_1^e |(x-1)\ln x|dx=(1)$

$$\left.\begin{array}{l} x>1 \Rightarrow x-1>0 \\ x>1 \Rightarrow \ln x>\ln 1 \Rightarrow \ln x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-1)\ln x>0$$

Από (1) έχουμε:

$$\int_1^e (x-1)\ln x dx=\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln x dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}-x\right)(\ln x)'dx=$$

$$\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e \left(\frac{x}{2}-1\right)dx=$$

$$\left[\frac{x^2}{2}-x\ln x\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)\ln e-\left(\frac{1}{2}-1\right)\ln 1-\left[\left(\frac{e^2}{4}-e\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)\right]=$$

$$\left(\frac{e^2}{2}-e\right)\cdot 1-\frac{e^2}{4}+e+\frac{1}{4}-1=$$

$$\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e+\frac{1}{4}-1=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4}\ \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1.

$f(x)\neq 0$,συνεχής, $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$ και $\ln x - x=\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt+e\right)|f(x)|$

Έστω $h(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}\geq 0$, Η $\frac{x-x^2}{e}$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πολυωνυμική

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα το $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt$ παραγωγ. στο $(0,+\infty)$

Το x^2-x+1 παραγ. ως πολυωνυμική

Για x=1 $h(1)=\int_1^{1^2-1+1} f(t)dt-\frac{1-1^2}{e}=\cancel{\int_1^1 f(t)dt}^{\,0}-0=0$

Άρα $h(x)\geq h(1)$ για κάθε $x>0$ οπότε η h παρουσιάζει στο x_o=1 ελάχιστο και επειδή η h παραγωγίσιμη στο x_o=1, από θεώρημα fermat προκύπτει $h'(1)=0$

Έχουμε $h'(x)=(\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt)'-(\frac{x-x^2}{e})'=f(x^2-x+1)(2x-1)-\frac{1-2x}{e}$

Για x=1 έχουμε $h(1)=0\Rightarrow f(1)(2\cdot 1-1)-\frac{1-2\cdot 1}{e}=0\Rightarrow f(1)-\frac{-1}{e}=0\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$

Επειδή f συνεχής και $f(x)\neq 0$ στο $(0,+\infty)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $f(1)=-\frac{1}{e}$ άρα $f(x)<0$

Επειδή $f(x)<0$ έχουμε $|f(x)|=-f(x)$

$\ln x-x=(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e)f(x)$ (1)

Η $\ln x-x$ συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά συνεχών.

Η f(x) συνεχής στο $(0,+\infty)$ οπότε ο λόγος $\frac{\ln t-t}{f(t)}$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών άρα και το $\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt$ παραγωγ.

Έχουμε από την (1) επειδή f(x)<0

$\frac{\ln x-x}{f(x)}=\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$

Επειδή $\ln x-x\leq -1$ για κάθε x>0 άρα $\ln x-x<0$ και $f(x)<0$ άρα

$\frac{\ln x-x}{f(x)}>0$ οπότε και $\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e>0$

Άρα $f(x)=\dfrac{\ln x-x}{\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e}$ είναι παραγωγ, ως πηλίκο παραγωγ.

Οπότε $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f_{(t)}}dt + e\right)(-f(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f_{(t)}}dt + e\right)f(x) \overset{f(x)\neq 0}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f_{(t)}}dt + e \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f_{(t)}}dt + e\right)' \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)}$

Απο εφαρμογή σελ 252 είναι

$\frac{\ln x - x}{f(x)} = c \cdot e^x$

Για $x = 1$ $\frac{\ln 1 - 1}{f(1)} = c \cdot e \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-1}{-\frac{1}{e}} = c \cdot e \Rightarrow e = c \cdot e \Rightarrow c = 1$

Άρα

$\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Rightarrow \ln x - x = e^x \cdot f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \frac{\ln x - x}{e^x} \Rightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x)\ ,\ x > 0$

Δ2.

$\lim_{x\to 0^+}(f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\left[f(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)} - 1\right] =$

$= \lim_{x\to 0^+} f(x)\left(\frac{\eta\mu\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} - 1\right) = (1)$

Έχουμε

$\frac{1}{f(x)} = t$

όταν $x \to 0^+$ τότε $t \to t_o$ όπου $t_o = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\ln x - x} = 0$

$\left(\lim_{x\to 0^+} e^x = 1,\quad \lim_{x\to 0^+}(\ln x - x) = -\infty\right)$

Άρα $\lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{t\to 0} \frac{\eta\mu t}{t} = 1$

Ακόμη $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - x}{e^x} = -\infty$

διότι

$\lim_{x\to 0^+}(\ln x - x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} e^x = e^o = 1$

Άρα στην (1) προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $(-\infty)\cdot 0$

Οπότε η (1) γράφεται

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\eta\mu \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} - 1}{\frac{1}{f(x)}} \overset{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \frac{1}{f(x)} = t}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\eta\mu t}{t} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\eta\mu t}{t} - \frac{t}{t}}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\eta\mu t - t}{t^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu t - 1}{2t} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{t\to 0} \frac{-\eta\mu t}{2} = 0$$

Δ3.

$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$, Η F(x) παραγωγ. Επειδή η f(t) συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα η F(x) συνεχής.

$F'(x) = f(x) = e^{-x}(\ln x - x) < 0$

$e^{-x} > 0$ και για $x > 0$ $\ln x \le x - 1 \Rightarrow \ln x - x \le 1 \Rightarrow \ln x - x < 0$

άρα η F(x) γν.φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

$F''(x) = f'(x) = -e^{-x}(\ln x - x) + e^{-x}(\frac{1}{x} - 1) =$

$= e^{-x}(-\ln x + x + \frac{1}{x} - 1)$

Για x>0 έχουμε

Το $e^{-x} > 0$ και $\ln x \le x-1 \Rightarrow x-1-\ln x \ge 0$ (1)

Είναι $x>0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$ (2) Απο (1) και (2) με πρόσθεση

$-\ln x + x + \frac{1}{x} - 1 > 0$

Άρα $F''(x) > 0$ οπότε $F(x)$ κυρτή στο $(0,+\infty)$

Έχουμε

$F(x)+F(3x) > 2F(2x) \Leftrightarrow F(x)+F(3x) > F(2x)+F(2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(3x)-F(2x) > F(2x)-F(x)$

Η $F(x)$ συνεχής στο $[x,2x]$

Η $F(x)$ παργωγίσιμη στο $(x,2x)$

Απο Θ.Μ.Τ στο $(x,2x)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x,2x)$

ώστε $F'(\xi_1) = \frac{F(2x)-F(x)}{2x-x} \Rightarrow F'(\xi_1) = \frac{F(2x)-F(x)}{x}$

Η $F(x)$ συνεχής στο $[2x,3x]$

Η $F(x)$ παργωγίσιμη στο $(2x,3x)$

Απο Θ.Μ.Τ στο $(2x,3x)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (2x,3x)$

ώστε $F'(\xi_2) = \frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x} \Rightarrow F'(\xi_2) = \frac{F(3x)-F(2x)}{x}$

Επειδή η $F(x)$ κυρτή άρα η $F'(x)$ γν.αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Έχουμε $\xi_1 \in (x,2x)$, και $\xi_2 \in (2x,3x)$ οπότε $x < \xi_1 < 2x < \xi_2 < 3x$

άρα $\xi_1 < \xi_2 \overset{F'\uparrow}{\Rightarrow} F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Rightarrow \frac{F(2x)-F(x)}{x} < \frac{F(3x)-F(2x)}{x} \Rightarrow$

$\overset{\cdot x>0}{\Rightarrow} F(2x)-F(x) < F(3x)-F(2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow F(2x)+F(2x) < F(3x)-F(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2F(2x) < F(3x)-F(x)$

Δ4.

$F(\beta)+F(3\beta) = 2F(\xi) \Leftrightarrow$

$2F(\xi)-F(\beta)-F(3\beta) = 0$

Έστω η $g(x) = 2F(x)-F(\beta)-F(3\beta)$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[\beta,2\beta]$

- $g(\beta) = 2F(\beta)-F(\beta)-F(3\beta) = F(\beta)-F(3\beta) > 0$

Διότι $\beta < 3\beta \overset{F\gamma\nu.\varphi\theta}{\Rightarrow} F(\beta) > F(3\beta) \Rightarrow F(\beta)-F(3\beta) > 0$

- $g(2\beta) = F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$

Διότι $F(x) + F(3x) > 2F(2x) \overset{x=\beta}{\Rightarrow} F(\beta) + F(3\beta) > 2F(2\beta) \Rightarrow 0 > 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta)$
Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\beta, 2\beta)$ ώστε $g(\xi) = 0$
Επειδή $g'(x) = 2F'(x) < 0$ άρα η g γν. φθίνουσα, άρα είναι «1-1»
Οπότε η ρίζα μοναδική.
Δηλαδή υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ ώστε $g(\xi) = 0 \Rightarrow 2F(\xi) - F(\beta) - F(3\beta) = 0 \Rightarrow$
$2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$

<u>Επιμέλεια</u>
Μυλωνίδης Σ.
Τάνης Α.
Ηλιάδης Κ.
Μαργαριτέλη Ε.
Πασχαλίδου Ξ.
Σαμαρά Φ.