ΤΡΙΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 28

Α2. Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους ν , οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ είναι οι t_1 , t_2 , ... , t_ν

τότε η μέση τους τιμή δίνεται από τη σχέση $\overline{x} = \dfrac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu}$

Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 14

Α4. $\alpha \to \Sigma$, $\beta \to \Lambda$, $\gamma \to \Sigma$, $\delta \to \Lambda$, $\varepsilon \to \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Έστω ότι c είναι το πλάτος των κλάσεων . Τότε οι κλάσεις έχουν τη μορφή

$$\left.\begin{array}{l} [6\ ,\ 6+c) \\ [6+c\ ,\ 6+2c) \\ [6+2c\ ,\ 6+3c) \\ [6+3c\ ,\ 6+4c) \\ [6+4c\ ,\ 6+5c) \end{array}\right\} \Rightarrow 6+5c = 26 \Rightarrow 5c = 20 \Rightarrow c = 4$$

Είναι $\alpha_1 = 72^o \Rightarrow \dfrac{\nu_1}{\nu}\cdot 360^o = 72^o \Rightarrow \dfrac{16}{\nu}\cdot 360^o = 72^o \Rightarrow 16\cdot 360 = 72\nu \Rightarrow \nu = \dfrac{16\cdot \cancel{360}^{5}}{\cancel{72}} \Rightarrow \nu = 80$

Είναι $f_1 = \dfrac{\nu_1}{\nu} \Rightarrow f_1 = \dfrac{16}{80} \Rightarrow f_1 = \dfrac{4}{20} \Rightarrow f_1 = 0,2$

Ισχύει $f_1 + f_2 + f_3 + f_3 + f_5 = 1 \Rightarrow 0,2 + \dfrac{1}{3}f_3 + f_3 + f_3 + \dfrac{1}{3}f_3 = 1 \overset{\cdot 3}{\Rightarrow} 0,6 + f_3 + 3f_3 + 3f_3 + f_3 = 3 \Rightarrow$

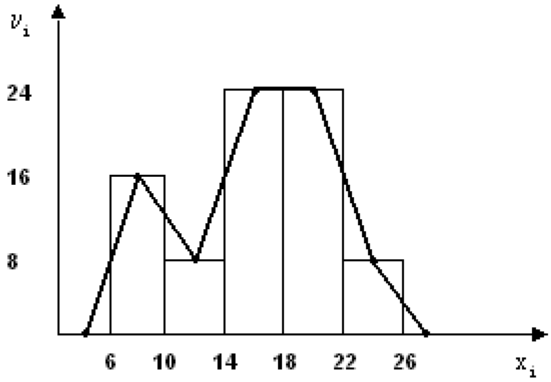
$\Rightarrow 8f_3 = 3 - 0,6 \Rightarrow f_3 = \dfrac{2,4}{8} \Rightarrow f_3 = 0,3 = f_4$

Είναι $f_2 = \dfrac{1}{3}f_3 \Rightarrow f_2 = \dfrac{1}{3}0,3 \Rightarrow f_2 = 0,1$ και $f_5 = \dfrac{1}{3}f_3 \Rightarrow f_5 = \dfrac{1}{3}0,3 \Rightarrow f_5 = 0,1$

Οπότε ο πίνακας γίνεται

Αριθμός ημερών αδείας	x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
$[6, 10)$	8	16	0,2	16	0,2
$[10, 14)$	12	8	0,1	24	0,3
$[14, 18)$	16	24	0,3	48	0,6
$[18, 22)$	20	24	0,3	72	0,9
$[22, 26)$	24	8	0,1	80	1
Σύνολο		80	1		

Β2. Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων είναι :



Β3.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{8\cdot 16 + 12\cdot 8 + 16\cdot 24 + 20\cdot 24 + 24\cdot 8}{80} = \frac{128+96+384+480+192}{80} = \frac{1280}{80} = 16$$

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2\cdot\nu_i = \frac{1}{80}\left[(8-16)^2\cdot 16+(12-16)^2\cdot 8+(16-16)^2\cdot 24+(20-16)^2\cdot 24+(24-16)^2\cdot 8\right]=$$

$$=\frac{1}{80}(64\cdot 16+16\cdot 8+0\cdot 24+16\cdot 24+64\cdot 8)=\frac{1}{80}(1024+128+0+384+512)=\frac{2048}{80}=25,6$$

Άρα $s=\sqrt{25,6}\approx 5,06$

Β4.
Θεωρούμε ότι η κατανομή είναι ομοιόμορφη

Από 10 έως 14 ημέρες σε πλάτος 4 είναι 10 %
Από 12 έως 14 ημέρες σε πλάτος 2 είναι x %
Οπότε $4x = 20 \Rightarrow x = 5\%$

Από 14 έως 18 ημέρες είναι 30 %
Από 18 έως 22 ημέρες είναι 30 %

Από 22 έως 26 ημέρες σε πλάτος 4 είναι 10 %
Από 22 έως 25 ημέρες σε πλάτος 3 είναι y %
Οπότε $4y = 30 \Rightarrow x = 7{,}5\%$

Συνολικά από 12 έως 25 ημέρες είναι 5 + 30 + 30 + 7,5 = 72,5 %

ΘΕΜΑ Γ

$\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \omega_4 , \omega_5\}$, $A = \{\omega_1 , \omega_2 , \omega_3\}$, $B = \{\omega_3 , \omega_4 , \omega_5\}$, $P(A) = \frac{1}{2}$

$P(\omega_1) = \alpha$, $P(\omega_2) = \beta$, $P(\omega_3) = \gamma$, $g(x) = P(\omega_4)x^3$

Γ1.

Είναι $26\alpha^2 - 10\alpha - 2\alpha\beta + \beta^2 + 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{25\alpha^2 + \alpha^2}_{26\alpha^2} - 10\alpha - 2\alpha\beta + \beta^2 + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (25\alpha^2 - 10\alpha + 1) + (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = 0 \Rightarrow (5\alpha - 1)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\alpha - 1 = 0$ και $\alpha - \beta = 0 \Rightarrow 5\alpha = 1$ και $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} = \beta$

Είναι $P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{10}$

Γ2.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έχουμε } g'(1) = 1 \\ \text{Είναι } g'(x) = 3P(\omega_4)x^2 \\ \text{Για } x = 1 \text{ είναι } g'(1) = 3P(\omega_4) \end{array}\right\} \Rightarrow 3P(\omega_4) = 1 \Rightarrow P(\omega_4) = \frac{1}{3}$$

Είναι

$\underbrace{P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3)}_{1/2} + P(\omega_4) + P(\omega_5) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + P(\omega_5) = 1 \Rightarrow P(\omega_5) = 1 - \frac{5}{6} \Rightarrow P(\omega_5) = \frac{1}{6}$

Γ3.

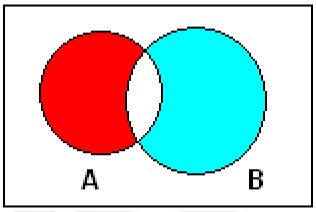
Είναι $P(B) = P(\omega_3) + P(\omega_4) + P(\omega_5) = \frac{1}{10} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

και $A \cap B = \{\omega_3\}$ οπότε $P(A \cap B) = P(\omega_3) = \frac{1}{10}$

Άρα $P(K)=P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=P(A-B)+P(B-A)=$

$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}+\frac{3}{5}-\frac{1}{10}=\frac{11}{10}-\frac{2}{10}=\frac{9}{10}$



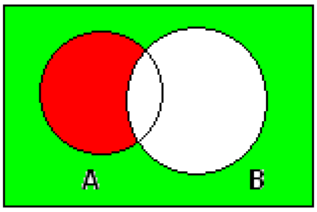
Είναι $\Lambda=A\cup B'$

Οπότε $P(\Lambda)=P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=$

$=P(A)+1-P(B)-P(A-B)=$

$=\cancel{P(A)}+1-P(B)-\cancel{P(A)}+P(A\cap B)=$

$=1-\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

μήκος = πλάτος = $6-2x$ και ύψος = x

Άρα ο όγκος δίνεται από τον τύπο

$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=(6-2x)(6-2x)\cdot x=2(3-x)\cdot 2(3-x)\cdot x=4x\cdot(3-x)^2$

Οπότε $f(x)=4x\cdot(3-x)^2$ με $0<x<3$

Δ2.

Για $x\in(0\,,\,3)$ έχουμε :

$f'(x)=4(3-x)^2-4x\cdot 2(3-x)=4(3-x)(3-x-2x)=4(3-x)(3-3x)=4(3-x)3(1-x)$

Οπότε $f'(x)=12(3-x)(1-x)$

$f'(x)=0\Rightarrow 12(3-x)(1-x)=0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x=1 \text{ ή } x=3\\ 0<x<3\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=1$

$f'(x)>0\Rightarrow 12(3-x)(1-x)>0\underset{3-x>0}{\overset{0<x<3}{\Rightarrow}}1-x>0\Rightarrow x<1$

x	0	1	3
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

Για $x=1$ ο όγκος της δεξαμενής γίνεται μέγιστος.

Δ3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)-8}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4(x+2)(3-x-2)^2-8}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4(x+2)(1-x)^2-8}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4x+8)(1-2x+x^2)-8}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\cancel{-8x^2}+4x^3\cancel{+8}-16x\cancel{+8x^2}\cancel{-8}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-12x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cancel{x}(x^2-3)}{\cancel{x}}=4(-3)=-12$$

Δ4.

$1=x_1<x_2<x_3<x_4<x_5=2$

$y_i=f(x_i)$, $\bar{y}=12$, $s_y=2$

Στο διάστημα $[1,2]$ η f γνησίως φθίνουσα άρα

$$1=x_1<x_2<x_3<x_4<x_5=2 \overset{f\ \text{γν.φθίνουσα}}{\Rightarrow} f(1)=f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)>f(x_4)>f(x_5)=f(2)$$

άρα αν διατάξουμε τις παρατηρήσεις θα έχουμε:

$f(2)=f(x_5)<f(x_4)<f(x_3)<f(x_2)<f(x_1)=f(1)$

οπότε το εύρος $R=f(1)-f(2)=4\cdot 1(3-1)^2-4\cdot 2(3-2)^2=4\cdot 4-8\cdot 1=16-8=8$

Αν στις παρατηρήσεις y_i προστεθεί αριθμός α έχουμε

$\bar{y}'=\bar{y}+\alpha=12+\alpha$ και $s_y{}'=s_y=2$

$$CV=2CV_y+\frac{R}{12}\Rightarrow\frac{s_{y'}}{\bar{y}'}=2\frac{s_y}{\bar{y}}+\frac{R}{12}\Rightarrow\frac{2}{12+\alpha}=2\frac{2}{12}+\frac{8}{12}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2}{12+\alpha}=1\Rightarrow 2=12+\alpha\Rightarrow\alpha=-10 \quad \text{δεκτή.}$$

Δ5.

Είναι $A\subseteq B\Rightarrow 0<P(A)\le P(B)\le 1 \overset{f\ \text{γν.αύξουσα στο}\ (0,1]}{\Rightarrow} f(P(A))\le f(P(B))\Rightarrow$

$$\Rightarrow 4P(A)(3-P(A))^2\le 4P(B)(3-P(B))^2 \underset{(3-P(A))^2>0}{\overset{P(B)>0}{\Rightarrow}} \frac{P(A)}{P(B)}\le\frac{(3-P(B))^2}{(3-P(A))^2}\Rightarrow\frac{P(A)}{P(B)}\le\left(\frac{3-P(B)}{3-P(A)}\right)^2$$

Επιμέλεια : Μυλωνίδης Σ. – Τάνης Α.