# ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
# ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 262

**Α2.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 141

**Α3.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 246

**Α4.** $\alpha \to \Sigma$ , $\beta \to \Sigma$ , $\gamma \to \Lambda$ , $\delta \to \Sigma$ , $\varepsilon \to \Lambda$

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.**

Επειδή ο w είναι φανταστικός ισχύει ότι :

$$w=-\overline{w} \Rightarrow \frac{z-1}{z+1}=-\left(\overline{\frac{z-1}{z+1}}\right) \Rightarrow \frac{z-1}{z+1}=-\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} \Rightarrow (z-1)(\overline{z}+1)=-(z+1)(\overline{z}-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\overline{z}\cancel{+z}\cancel{-\overline{z}}-1=-z\overline{z}\cancel{+z}\cancel{-\overline{z}}+1 \Rightarrow 2z\overline{z}=2 \Rightarrow z\overline{z}=1 \Rightarrow |z|^2=1 \Rightarrow |z|=1$$

**Β2.** Επειδή $|z|=1 \Rightarrow |z|^2=1 \Rightarrow z\overline{z}=1 \Rightarrow \overline{z}=\frac{1}{z}$

Είναι $\left(z-\frac{1}{z}\right)^4=(z-\overline{z})^4=(2\,\mathrm{Im}(z)\cdot i)^4 \overset{z=\alpha+\beta i}{=} (2\beta\cdot i)^4=16\beta^4\cdot i^4=16\beta^4\cdot 1=16\beta^4 \in R$

Άρα ο $z-\frac{1}{z}$ είναι πραγματικός

**Β3.** Για τους $z_1$ και $z_2$ ισχύει :

$|z_1|=1 \Rightarrow |z_1|^2=1 \Rightarrow z_1\overline{z_1}=1 \Rightarrow \overline{z_1}=\frac{1}{z_1}$ και ομοίως $|z_2|=1 \Rightarrow \overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$

Από την τριγωνική ανισότητα ισχύει :

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2| \Rightarrow |z_1+z_2| \le 1+1 \Rightarrow |z_1+z_2| \le 2 \Rightarrow |z_1+z_2|^2 \le 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \le 4 \Rightarrow (z_1+z_2)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right) \le 4$$

**Β4.** Θέτουμε $u=x+yi$ και $w=\gamma+\delta i$ . Επειδή ο w είναι φανταστικός είναι $w=\delta i$

$$u-ui=\frac{i}{w}-w \Rightarrow x+yi-(x+yi)i=\frac{\cancel{i}}{\delta\cancel{i}}-\delta i \Rightarrow x+yi-xi+y=\frac{1}{\delta}-\delta i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+(y-x)i=\frac{1}{\delta}-\delta i \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{1}{\delta} \\ y-x=-\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{1}{\delta} \\ x-y=\delta \end{cases} \Rightarrow x+y=\frac{1}{x-y} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x+y)(x-y)=1 \Rightarrow x^2-y^2=1$ . Άρα η εικόνα του u ανήκει σε ισοσκελή υπερβολή

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Είναι $xf(x)+1=e^x \Rightarrow xf(x)=e^x-1$

- Αν $x \neq 0$ τότε είναι $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$
- Αν $x=0$ τότε επειδή η f συνεχής στο $x_0=0$ ισχύει ότι

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$

Άρα $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & , \ x\neq 0 \\ 1 & , \ x=0 \end{cases}$

**Γ2.**

Για $x\neq 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{\left(e^x-1\right)'x-\left(e^x-1\right)(x)'}{x^2}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

Θέτουμε $h(x)=xe^x-e^x+1$

Είναι $h'(x)=(x)'e^x+x\left(e^x\right)'-\left(e^x\right)'=\cancel{e^x}+xe^x\cancel{-e^x}=xe^x$

$h'(x)=0 \Rightarrow xe^x=0 \overset{e^x>0}{\Rightarrow} x=0$

$h'(x)>0 \Rightarrow xe^x>0 \overset{e^x>0}{\Rightarrow} x>0$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Για $x<0 \overset{\text{h γν.φθίν.}}{\Rightarrow} h(x)>h(0)\Rightarrow h(x)>0$

Για $x>0 \overset{\text{h γν. αυξ.}}{\Rightarrow} h(x)>h(0)\Rightarrow h(x)>0$

Οπότε για $x\neq 0$ είναι $f'(x)>0$

$$\text{Είναι } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1-x}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

Άρα η f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=\frac{1}{2}$ , οπότε η f παραγωγίσιμη στο R

και επειδή $f'(0)=\frac{1}{2}>0$ ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$

Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in R$ οπότε είναι «1-1» και αντιστρέφεται

Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$ είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της $f$

Επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x}=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

Τελικά $A_{f^{-1}}=f(A)=(0\ ,+\infty)$

**Γ3.**

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(0\ ,f(0))$ είναι :

$$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y-1=\frac{1}{2}x\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+1$$

Η εξίσωση $2f(x)=x+2$ γίνεται $2f(x)=x+2\overset{:2}{\Rightarrow}f(x)=\underbrace{\frac{1}{2}x+1}_{\text{εξίσωση εφαπτομένης}}$

Επειδή η f είναι κυρτή οποιαδήποτε εφαπτομένη της θα βρίσκεται κάτω από την $C_f$ εκτός από το κοινό τους σημείο $A(0\ ,f(0))$(σημείο επαφής ) . Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το κοινό σημείο είναι μοναδικό

**Γ4.**

$$\lim_{x\to0^+}\left[x(\ln x)\ln f(x)\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to0^+}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=0\cdot0=0$$

Διότι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\right)=0$

Και επίσης θέτουμε $\frac{e^x-1}{x}=u$ και όταν $x\to0^+\Rightarrow u\to1$ οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln1=0$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

Είναι $2f(x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\int_1^x e^{f(t)}f'(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)dt+2$ **(1)**

Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$2f'(x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)'e^{f(x)}+\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(e^{f(x)}\right)'=\left(\int_1^x e^{f(t)}f'(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)dt\right)'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f'(x)+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)}+\cancel{\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)}f'(x)}=\cancel{e^{f(x)}f'(x)\left(x+\frac{1}{x}\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f'(x)+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)}=0\Rightarrow 2f'(x)=-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)}\overset{:e^{f(x)}\neq 0}{\Rightarrow}\frac{2f'(x)}{e^{f(x)}}=-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f'(x)e^{-f(x)}=-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow}-2f'(x)e^{-f(x)}=1-\frac{1}{x^2}\Rightarrow\left(2e^{-f(x)}\right)'=\left(x+\frac{1}{x}\right)'$$

Οπότε είναι $2e^{-f(x)}=x+\frac{1}{x}+c$ **(2)** , όπου c σταθερός αριθμός

Από την **(1)** για $x=1$ έχουμε :

$$2f(1)+\left(1+\frac{1}{1}\right)e^{f(1)}=\underbrace{\cancel{\int_1^1 e^{f(t)}f'(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)dt}}_{0}+2\Rightarrow 2f(1)+2e^{f(1)}=2\overset{:2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(1)+e^{f(1)}=1\Rightarrow f(1)+e^{f(1)}-1=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x+e^x-1$ , $x\in R$

Για $x_0=0$ είναι $g(0)=0+e^0-1\Rightarrow g(0)=0$.

Δηλαδή το $x_0=0$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x+e^x-1=0$

Είναι $g'(x)=1+e^x>0$

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in R$ , άρα είναι «1-1» και συνεπώς η ρίζα της g είναι μοναδική . Οπότε η εξίσωση $f(1)+e^{f(1)}-1=0$ έχει μοναδική ρίζα $f(1)=0$

Στη σχέση **(2)** και για $x=1$ έχουμε :

$$2e^{-f(1)}=1+\frac{1}{1}+c\overset{f(1)=0}{\Rightarrow}2e^0=2+c\Rightarrow 2=2+c\Rightarrow c=0$$

Οπότε τελικά έχουμε :

$$2e^{-f(x)}=x+\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{2}{e^{f(x)}}=\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow\frac{e^{f(x)}}{2}=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow e^{f(x)}=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow f(x)=\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right),\ x>0$$

**Δ2.**

Είναι $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ οπότε $F'(x)=f(x)$

$$F''(x)=f'(x)=\left(\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right)'=\frac{1}{\frac{2x}{x^2+1}}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{\cancel{x^2+1}}{2x}\cdot\frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^{\cancel{2}}}=\frac{2x^2+2-4x^2}{2x\left(x^2+1\right)}=$$

$$=\frac{-2x^2+2}{2x\left(x^2+1\right)}=\frac{\cancel{2}\left(1-x^2\right)}{\cancel{2}x\left(x^2+1\right)}=\frac{1-x^2}{x\left(x^2+1\right)}$$

$$F''(x)=0\Rightarrow\frac{1-x^2}{x\left(x^2+1\right)}=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}x=1\\ \text{ή}\\ x=-1\ ,\ \text{απορρίπτεται γιατί } x>0\end{array}\right.$$

$$F''(x)>0\Rightarrow\frac{1-x^2}{x\left(x^2+1\right)}>0\overset{x>0}{\Rightarrow}1-x^2>0\Rightarrow 1>x^2\Rightarrow|x|<1\overset{x>0}{\Rightarrow}0<x<1$$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $F''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $F(x)$ | ∪ | | ∩ |

Άρα η $F$ παρουσιάζει στο $x_0=1$ σημείο καμπής το $\Sigma(1\ ,\ F(1))$

με $F(1)=\int_1^1 f(t)dt=0$

Επειδή $\beta>x_0\Rightarrow\beta>1\Rightarrow\beta-1>0\Rightarrow\beta-1\neq 0$

Οπότε η ευθεία $\varepsilon: F(\beta)x-(\beta-1)y+2012(\beta-1)=0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\dfrac{F(\beta)}{\beta-1}$

Η εφαπτομένη στο σημείο $M(\xi\ ,\ F(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\varphi}=F'(\xi)$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(x_0\ ,\ \beta)$ ώστε $F'(\xi)=\dfrac{F(\beta)}{\beta-1}$

Η $F(x)$ συνεχής στο $[x_0\ ,\ \beta]$ ως παραγωγίσιμη

Η $F(x)$ παραγωγίσιμη στο $(x_0\ ,\ \beta)$ με $F'(x)=f(x)$

Από το θεώρημα Μέση Τιμής στο διάστημα $(x_0\ ,\ \beta)$ για την $F(x)$ υπάρχει $\xi\in(x_0\ ,\ \beta)$ ώστε :

$$F'(\xi)=\frac{F(\beta)-F(x_0)}{\beta-1}\overset{x_0=1}{=}\frac{F(\beta)-\cancel{F(1)}^{0}}{\beta-1}=\frac{F(\beta)}{\beta-1}$$

Επειδή στο $[1\ ,\ \beta]$ η $F(x)$ είναι κοίλη , η $F'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε είναι «1-1»

Άρα το σημείο $\xi$ είναι μοναδικό

**Δ3.**

Είναι $\dfrac{\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x^5}{x-1}+\dfrac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3}=0$

Για $x\neq 1$ και $x\neq 3$ η εξίσωση γίνεται :

$(x-3)\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x^5+(x-1)(\beta-1)(x+1)^3=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=(x-3)\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x^5+(x-1)(\beta-1)(x+1)^3$

Είναι $h(1)=(1-3)\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]1^5+\cancel{\overset{0}{(1-1)}(\beta-1)(1+1)^3}\Rightarrow h(1)=-2\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]$

Επειδή για $x>1$ η $F(x)$ είναι κοίλη έχουμε ότι η $F'(x)$ γνησίως φθίνουσα

Για $1<\xi<\beta \overset{F'\ \text{γν.φθίν.}}{\Rightarrow} F'(\xi)>F'(\beta)\Rightarrow \dfrac{F(\beta)}{\beta-1}>f(\beta)\Rightarrow \dfrac{F(\beta)}{\beta-1}-f(\beta)>0\Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{F(\beta)}{1-\beta}-f(\beta)>0\overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow}\dfrac{F(\beta)}{1-\beta}+f(\beta)<0\underset{\cdot(1-\beta)<0}{\overset{\beta>1}{\Rightarrow}}F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)>0\overset{\cdot(-2)}{\Rightarrow}-2\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]<0$

Είναι $h(3)=\cancel{\overset{0}{(3-3)}\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]3^5}+(3-1)(\beta-1)(3+1)^3=2(\beta-1)\cdot 64=128(\beta-1)>0$

Η $h(x)$ συνεχής στο $[1\,,\,3]$ ως πράξη συνεχών και $h(1)\cdot h(3)<0$

οπότε από το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1\,,\,3)$ ώστε

$h(x_0)=0\Leftrightarrow(x_0-3)\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x_0^{\,5}+(x_0-1)(\beta-1)(x_0+1)^3=0\Leftrightarrow$

$\overset{:(x_0-3)(x_0-1)\neq 0}{\Leftrightarrow}\dfrac{\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x_0^{\,5}}{x_0-1}+\dfrac{(\beta-1)(x_0+1)^3}{x_0-3}=0$

Άρα η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0\in(1\,,\,3)$

**Δ4.**

Για το $\displaystyle\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt$ θέτουμε $\dfrac{t}{x}=u$

Είναι $\left(\dfrac{t}{x}\right)'dt=(u)'du\Rightarrow\dfrac{1}{x}dt=du\Rightarrow dt=xdu$

Για $t=x$ είναι $u=\dfrac{x}{x}\Rightarrow u=1$

Για $t=x^2$ είναι $u=\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\Rightarrow u=x$

Οπότε είναι $\displaystyle\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt=\int_1^x f(u)x\,du=x\int_1^x f(u)du$

Άρα η αρχική σχέση γίνεται :

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x tf(t)dt \Leftrightarrow x\int_1^x f(t)dt \le \int_1^x tf(t)dt \Leftrightarrow x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt \le 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt$

Αρκεί να δείξουμε ότι $K(x) \le 0$

Έχουμε ότι $K(1) = 0$

Είναι $K'(x) = \int_1^x f(t)dt + \cancel{xf(x)} - \cancel{xf(x)} = \int_1^x f(t)dt = F(x)$

Ισχύει ότι $K'(1) = F(1) = 0$

Επειδή $f(A) = (-\infty\ ,\ 0]$ για κάθε $x > 0$, ισχύει ότι $f(x) \le 0 \Rightarrow F'(x) \le 0$

Οπότε η F(x) είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x > 0$

- Για $x > 1 \overset{F\ \text{γν.φθίν.}}{\Rightarrow} F(x) < F(1) \Rightarrow F(x) < 0 \Rightarrow K'(x) < 0$
- Για $0 < x < 1 \overset{F\ \text{γν.φθίν.}}{\Rightarrow} F(x) > F(1) \Rightarrow F(x) > 0 \Rightarrow K'(x) > 0$

| x | 0 | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|
| K′(x) | + | 0 | − |
| K(x) | ↗ | | ↘ |

Οπότε στο σημείο $x_0 = 1$ η συνάρτηση $K(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο

Άρα ισχύει $K(x) \le K(1)$ για κάθε $x > 0$

$$K(x) \le K(1) \Rightarrow x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt \le x\underbrace{\int_1^1 f(t)dt}_{0} - \underbrace{\int_1^1 tf(t)dt}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt \le 0 \Rightarrow x\int_1^x f(t)dt \le \int_1^x tf(t)dt$$

**Επιμέλεια : Μυλωνίδης Σ. – Τάνης Α.**