ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΙΟΥ 2011
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. απόδειξη σελ 260
Α2. ορισμός Π.Α σελ 280
Α3.α) Σ β)Σ γ)Λ δ)Λ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \qquad w=z-3i+\frac{1}{z-3i}$

Είναι $|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \Rightarrow |z-3i|+|\overline{\overline{z}+3i}|=2 \Rightarrow |z-3i|+|z-3i|=2 \Rightarrow 2|z-3i|=2 \Rightarrow |z-3i|=1$

Είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=1$

Β2.

Είναι $\overline{z}+3i=\frac{1}{z-3i} \Leftrightarrow (\overline{z}+3i)(z-3i)=1 \Leftrightarrow \overline{(\overline{z}+3i)}(z-3i)=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow |z-3i|=1$ ισχύει

Β3.

$$\left.\begin{array}{l} w=\alpha+\beta i \\ w\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} w=\alpha \\ \overline{w}=\alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow w=\overline{w}$$

<u>Αρκεί να δείξω ότι:</u> $w=\overline{w}$

$$\overline{w}=\overline{z-3i+\frac{1}{z-3i}}=\overline{z}+3i+\frac{1}{\overline{z}+3i}=\frac{1}{z-3i}+\frac{1}{\frac{1}{z-3i}}=\frac{1}{z-3i}+z-3i=w$$

Άρα ο $w\in\mathbb{R}$

<u>Β΄ τρόπος</u>

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\overline{z}+3i=z+\overline{z}\in\mathbb{R}$$

Είναι $w=z-3i+\frac{1}{z-3i} \Rightarrow |w|=\left|z-3i+\frac{1}{z-3i}\right|$

Οπότε $$\left.\begin{array}{r} \left|z-3i+\frac{1}{z-3i}\right|\le|z-3i|+\left|\frac{1}{z-3i}\right| \Rightarrow |w|\le|z-3i|+\frac{1}{|z-3i|} \Rightarrow |w|\le 1+\frac{1}{1} \Rightarrow |w|\le 2 \\ \text{Επειδή } w\in R \end{array}\right\} \Rightarrow -2\le w\le 2$$

Β4.

$$|z-w|=\left|z-z+3i-\frac{1}{z-3i}\right|=\left|3i-\frac{1}{z-3i}\right|\overset{B2}{=}\left|\cancel{3i}-\overline{z}-\cancel{3i}\right|=\left|-\overline{z}\right|=\left|\overline{z}\right|=|z|$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Είναι $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow$

$$e^xf'(x)+e^xf''(x)-e^x=(x)'f'(x)+x\left(f'(x)\right)'\Leftrightarrow$$

$$\left(e^x\right)'f'(x)+e^x\left(f'(x)\right)'-\left(e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'\Leftrightarrow$$

$$\left(e^xf'(x)\right)'-\left(e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'\Leftrightarrow$$

$$\left(e^xf'(x)-e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'\Leftrightarrow e^xf'(x)-e^x=xf'(x)+c$$

Για x=0 έχουμε:

$$e^0f'(0)-e^0=0+c\Leftrightarrow 0-1=c\Leftrightarrow c=-1$$

Άρα: $e^xf'(x)-e^x=xf'(x)-1\Leftrightarrow e^xf'(x)-xf'(x)=e^x-1\Leftrightarrow f'(x)\left(e^x-x\right)=e^x-1$ (1)

Θέτουμε: $g(x)=e^x-x$

$$g'(x)=e^x-1$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$$

$$g'(x)>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	Ο.Ε	↗

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=0

Το $g(0)=e^0-0=1-0=1$

Άρα, για κάθε $x\in R$ είναι $g(x)\geq 1\Leftrightarrow g(x)>0\Leftrightarrow e^x-x>0$ (2)

Από

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{e^x-x}\left(e^x-1\right)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{e^x-x}\left(e^x-x\right)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\left[\ln\left(e^x-x\right)\right]'\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c$$

Για x=0 έχουμε: $f(0)=\ln 1+c \Leftrightarrow 0=c$

Άρα $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$ με πεδίο ορισμού της f $A_f=R$

Γ2.

$f(x)=\ln(e^x-x)$

$$f'(x)=\frac{1}{e^x-x}(e^x-x)'=\frac{e^x-1}{e^x-x}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘		↗
		Ο.Ε	

Η f γνησίως φθινουσα $(-\infty,0]$

Η f γνησίως αύξουσα $[0,+\infty)$

Η f για $x_0=0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, το $f(0)=\ln\left(e^0-0\right)=\ln 1=0$

Γ3.

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\frac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\frac{\left(e^x-1\right)'(e^x-x)-\left(e^x-1\right)(e^x-x)'}{\left(e^x-x\right)^2}=$$

$$\frac{e^x(e^x-x)-\left(e^x-1\right)(e^x-1)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{\left(e^{2x}-xe^x\right)-(e^{2x}-2e^x+1)}{\left(e^x-x\right)^2}=$$

$$\frac{\left(e^{2x}-xe^x\right)-e^{2x}+2e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{2e^x-xe^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^x-xe^x-1=0$

Θέτω: $\phi(x)=2e^x-xe^x-1$

$\phi'(x)=2e^x-e^x-xe^x=e^x-xe^x=e^x(1-x)$ είναι $e^x>0$

$\phi'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

$\phi'(x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
		Ο.Μ	

$\phi(1)=2e-e-1=e-1>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{x}-xe^{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2-x)e^{x}-1\right]=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x}-xe^{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2-x)e^{x}-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left((2-x)e^{x}\right)-1\right]=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2-x}{e^{-x}}\right)-1\overset{D'LH}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(2-x)'}{\left(e^{-x}\right)'}-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}}-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}-1=\lim_{x\to-\infty}e^{x}-1=0-1=-1$$

Οπότε $\phi(A_1)=\phi([-\infty\ ,1])\overset{(\phi\uparrow)}{=}\left[\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x)\ ,\ \phi(1)\right]=[-1\ ,\ e-1]$

$\left.\begin{array}{l}\text{Το } 0\in\phi(A_1)\\ \phi\uparrow A_1\end{array}\right\}\Rightarrow$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-\infty\ ,1)$ ώστε: $\phi(x_1)=0\Rightarrow f''(x_1)=0$

Επίσης $\phi(A_2)=\phi([1\ ,+\infty])\overset{(\phi\downarrow)}{=}\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)\ ,\ \phi(1)\right]=(-\infty\ ,\ e-1)$

Το $\left.\begin{array}{l}0\in\phi(A_2)\\ \phi\downarrow A_2\end{array}\right\}\Rightarrow$ υπάρχει μοναδικό $x_2\in[1,+\infty]$ ώστε: $\phi(x_2)=0\Leftrightarrow f''(x_2)=0$

Άρα,

- Για $x<x_1\overset{\phi\uparrow}{\Rightarrow}\phi(x)<\phi(x_1)\Rightarrow\phi(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$
- Για $x>x_1\overset{\phi\uparrow}{\Rightarrow}\phi(x)>\phi(x_1)\Rightarrow\phi(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$

Άρα εκατέρωθεν του x_1 αλλάζει το πρόσημο της $f''(x)$

Όμοια:

- Για $x>x_2\overset{\phi\downarrow}{\Rightarrow}\phi(x)<\phi(x_2)\Rightarrow\phi(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$
- Για $x<x_2\overset{\phi\downarrow}{\Rightarrow}\phi(x)>\phi(x_2)\Rightarrow\phi(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$

Άρα εκατέρωθεν του x_2 αλλάζει το πρόσημο της ϕ''

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$		$\frown$

Επομένως, υπάρχουν δύο x_1 x_2 ώστε $f''(x_1)=f''(x_2)=0$ και η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των x_1 x_2 οπότε η C_f έχει δύο σημεία καμπής $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$

Γ4.

Είναι $\ln(e^x-x)=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \ln(e^x-x)-\sigma\upsilon\nu x=0$

Θέτουμε $K(x)=\ln(e^x-x)-\sigma\upsilon\nu x$

Για την K(x) στο $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε

Η K(x) συνεχής στο $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$K(0)=\ln\left(e^0-0\right)-\sigma\upsilon\nu 0=\ln 1-1=-1<0$

$K\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)>0$

Διότι $e^x-x>1 \overset{x=\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}>1 \Rightarrow \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)>\ln 1 \Rightarrow \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)>0$

Άρα από θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε:

$K(x_0)=0 \Leftrightarrow \ln(e^{x_0}-x_0)=\sigma\upsilon\nu x_0$

Είναι $K'(x)=[\ln(e^x-x)-\sigma\upsilon\nu x]'=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}+\eta\mu x$

Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} \eta\mu x>0 \\ \text{Για } x>0\Rightarrow e^x>e^0\Rightarrow e^x-1>0 \\ \text{Είναι } e^x-x\geq 1 \text{ οπότε } e^x-x>0 \end{array}\right\}\Rightarrow K'(x)>0$$

. Άρα η K(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Οπότε αφού η K(x) έχει τουλάχιστον 1 για ρίζα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή K(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, το x_0 είναι μοναδική ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

f,g συνεχείς $: R \to R$

i) $f(x)>0\ ,\ \ g(x)>0$

ii) $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

iii) $\dfrac{1-g(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Δ1.

Έστω $I_1=\displaystyle\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

Θέτουμε

$u=x+t \Leftrightarrow t=u-x$

$du=dt$

Για $t=0:\ u_1=x$

Για $t=-x:\ u_2=0$

Άρα $I_1=\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_x^0\dfrac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du=\int_x^0\dfrac{e^{2u}}{e^{2x}}\dfrac{1}{g(u)}du$

Οπότε $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\dfrac{1}{e^{2x}}\displaystyle\int_x^0\dfrac{e^{2u}}{g(u)}du \overset{\cdot e^{2x}>0}{\Leftrightarrow} f(x)=1-\int_x^0\dfrac{e^{2u}}{g(u)}du \Leftrightarrow f(x)=\int_0^x\dfrac{e^{2u}}{g(u)}du+1 \quad (1)$

Η e^{2u} συνεχής στο R και η g(u) συνεχής στο R $\Rightarrow \dfrac{e^{2u}}{g(u)}$ συνεχής στο R $\Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^x\dfrac{e^{2u}}{g(u)}du$ παραγωγίσιμη στο R $\Rightarrow f(x)$ παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα παραγωγίσιμων

Έστω $I_2=\displaystyle\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Θέτουμε

$u=x+t \Leftrightarrow t=u-x$

$du=dt$

Για $t=0:\ u_1=x$

Για $t=-x:\ u_2=0$

Άρα $\quad I_2=\displaystyle\int_0^x\dfrac{e^{2u-2x}}{f(u)}du=\int_0^x\dfrac{e^{2u}}{e^{2x}}\dfrac{1}{f(u)}du=\dfrac{1}{e^{2x}}\int_x^0\dfrac{e^{2u}}{f(u)}du$

Οπότε $\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \frac{1}{e^{2x}}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{f(u)}du \Leftrightarrow g(x) = \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}du + 1$ (2)

Ομοίως , η g(x) είναι παραγωγίσιμη στο R οπότε παραγωγίζω τις (1) και (2)

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{2x}}{g(x)} \\ g'(x) &= \frac{e^{2x}}{f(x)} \end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} f'(x)g(x) &= e^{2x} \\ g'(x)f(x) &= e^{2x} \end{aligned}\right| \Rightarrow f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \underset{g(x)>0}{\overset{f(x)>0}{\Rightarrow}} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ln f(x))' = (\ln g(x))' \Rightarrow \ln f(x) = \ln g(x) + c$$

Για x = 0 είναι

$$\frac{1-f(0)}{e^0} = \cancel{\int_0^0 \frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt}^{\,0} \Rightarrow 1-f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

$$\frac{1-g(0)}{e^0} = \cancel{\int_0^0 \frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt}^{\,0} \Rightarrow 1-g(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 1$$

Άρα για x = 0 είναι $\ln f(0) = \ln g(0) + c \Rightarrow \ln 1 = \ln 1 + c \Rightarrow c = 0$

Οπότε $\ln f(x) = \ln g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Δ2.

$$f'(x) = \left(\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du + 1\right)' = \frac{e^{2x}}{g(x)} \overset{(f(x)=g(x))}{=} \frac{e^{2x}}{f(x)}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Rightarrow f'(x)f(x) = e^{2x} \Rightarrow 2f'(x)f(x) = 2e^{2x} \Rightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})' \Rightarrow f^2(x) = e^{2x} + c$$

Για x = 0 είναι $f^2(0) = e^0 + c \Rightarrow 1 = 1 + c \Rightarrow c = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Άρα } f^2(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \pm e^x \\ &\text{Αλλά } f(x) > 0 \quad , x \in R \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = e^x$$

Δ3.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}xe^{-\frac{1}{x}}$$

θέτω $\frac{1}{x}=u$ και είναι $u=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{u}$

Για $x\to 0^-$ είναι $u\to -\infty$

Οπότε είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{u}e^{-u}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-u}}{u}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-e^{-u}}{1}=-\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-u}=-\infty$

Δ4.

Είναι $f(t^2)=e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in R$

Για $t\in[x,1]$ έχουμε $0\le x\le 1$

$$f(t^2)>0\Rightarrow\int_x^1 f(t^2)dt>0\Rightarrow-\int_1^x f(t^2)dt>0\Rightarrow\int_1^x f(t^2)dt<0\Rightarrow F(x)<0 \quad \text{για } x\in[0,1].$$

Οπότε $F(x)<0$

Είναι $F'(x)=e^{x^2}$ και $F(1)=0$

$$E=\int_0^1|F(x)|dx=-\int_0^1(x)'F(x)dx=-[xF(x)]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=-\cancel{F(1)}^0+0\cdot\cancel{F(0)}^0+\int_0^1 xe^{x^2}dx==$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(e^1-e^0\right)=\frac{e-1}{2}\ \text{τ.μ}$$

Επιμέλεια :

Μυλωνίδης Σ.
Τάνης Σ.
Ηλιάδης Κ.
Μαργαριτέλη Ε.
Πασχαλίδου Ξ.
Σαμαρά Φ.