

ΘΕΜΑ Α

A1. σελ.152
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

A2. σελ.142
ΘΕΩΡΙΑ

A3. σελ.65

A4. α) Λ
β) Λ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β**B1.**

$$P(M) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(\Omega) = 4N(M)$$

$$\text{Οπότε } 64 < N(\Omega) < 72 \Leftrightarrow 64 < 4N(M) < 72 \Leftrightarrow \frac{64}{4} < N(M) < \frac{72}{4} \Leftrightarrow 16 < N(M) < 18$$

Επειδή $N(M)$ ακέραιος είναι $N(M) = 17$

$$\text{Άρα } N(\Omega) = 4 \cdot 17 = 68$$

B2.

Α' ΤΡΟΠΟΣ

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{N(A)}{68} \Leftrightarrow N(A) = 68 \cdot P(A) = 68 \cdot 4 \cdot \lambda^2$$

$$P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(K) = \frac{N(K)}{68} \Leftrightarrow N(K) = 68 \cdot P(K) = 68 \left(-5\lambda + \frac{7}{4} \right)$$

$$P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(M) = 68 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\text{Είναι } N(A) + N(K) + N(M) = N(\Omega) \Leftrightarrow 68 \cdot 4\lambda^2 + 68 \left(-5\lambda \frac{7}{4} \right) + 68 \frac{1}{4} = 68 \stackrel{:68}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

Β' ΤΡΟΠΟΣ

$$P(A) + P(K) + P(M) = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 1 \Rightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

Για $\lambda = 1$, έχουμε: $P(A) = 4 \cdot \lambda^2 = 4 > 1$ άτοπο

$$\text{Για } \lambda = \frac{1}{4}, \text{ έχουμε: } P(A) = 4 \cdot \lambda^2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(K) = -1 + \frac{7}{4} = -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(M) = \frac{1}{4}$$

Β3.

Στο κουτί υπάρχουν:

$$N(A) = P(A) \cdot N(\Omega) = \frac{1}{4} \cdot 68 = 17 \text{ άσπρες σφαίρες}$$

$$N(K) = P(K) \cdot N(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot 68 = 34 \text{ κόκκινες σφαίρες}$$

$$N(M) = P(M) \cdot N(\Omega) = 17 \text{ μαύρες σφαίρες}$$

B4.

Επιλέγουμε μια σφαίρα τυχαία. Η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη είναι:

$$P(A \cup M) = P(A) + P(M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. A(8,0) B(10,16) Γ(12,20) Δ(14, y_{Δ}) E(16, y_E) Z(18,10) H(20,0)

$$\bar{x} = 14,2$$

$$\Delta E // x'x \Rightarrow y_{\Delta} = y_E$$

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i v_i = \sum_{i=1}^5 x_i \frac{v_i}{v} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i \Leftrightarrow 14,2 = 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 14 \cdot \frac{y_{\Delta}}{100} + 16 \cdot \frac{y_{\Delta}}{100} + 18 \cdot 0,1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14,2 = 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 14 \cdot \frac{y_{\Delta}}{100} + 16 \cdot \frac{y_{\Delta}}{100} + 18 \cdot 0,1 \Leftrightarrow 14,2 = 1 + 2,4 + 0,3y_{\Delta} + 1,8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14,2 - 5,2 = 0,3y_{\Delta} \Leftrightarrow 9 = 0,3y_{\Delta} \Leftrightarrow y_{\Delta} = 30 \text{ και } y_E = 30 \text{ . Οπότε } f_3 = f_4 = 30\%$$

B' τρόπος

$$\text{Έχουμε } \sum_{i=1}^5 f_i \% = 100 \Rightarrow 10 + 20 + f_3 + f_4 + 10 = 100 \Rightarrow f_3 + f_4 = 100 - 40 \Rightarrow f_3 + f_4 = 60$$

$$\text{Όμως } y_{\Delta} = y_E \Rightarrow f_3 = f_4$$

$$\text{Άρα } 2f_3 = 60 \Rightarrow f_3 = 30\%$$

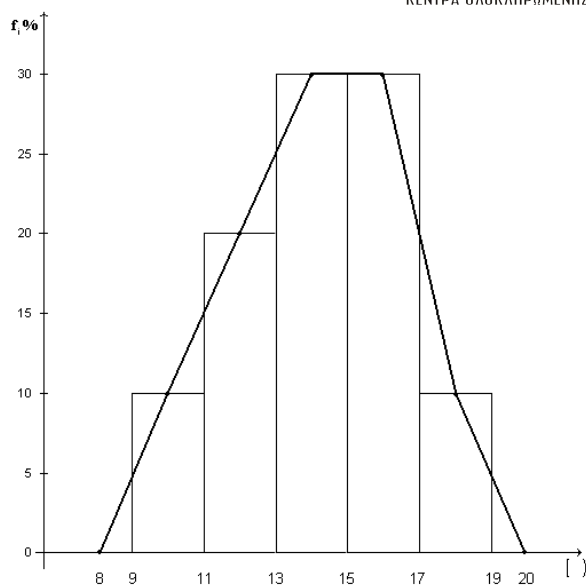
$$\text{Οπότε } f_3 = f_4 = 30\%$$

Γ2.

Το πλάτος των κλάσεων είναι $c = x_B - x_A \Leftrightarrow c = 2$

Η 1^η κλάση είναι $[\alpha, \beta)$ όπου $\alpha = x_B - \frac{c}{2} = 10 - \frac{2}{2} = 9$

Οπότε το αντίστοιχο ιστόγραμμα και πολύγωνο είναι



Γ3.

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	$f_i \%$
[9,11)	10	30
[11,13)	12	20
[13,15)	14	30
[15,17)	16	30
[17,19)	18	10
ΣΥΝΟΛΟ	-	100

Γ4.

Οι πωλητές που θα πάρουν την χορήγηση του επιπλέον εφάπαξ είναι για $x \geq 15$

Οπότε έχουμε $f_4 \% + f_5 \% = 30\% + 10\% = 40\%$

Γ5.

Το εμβαδό είναι το μέγεθος του δείγματος. Οπότε $v = 80$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Rightarrow 0,10 = \frac{v_1}{80} \Rightarrow v_1 = 8$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Rightarrow 0,20 = \frac{v_2}{80} \Rightarrow v_2 = 16$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Rightarrow 0,30 = \frac{v_3}{80} \Rightarrow v_3 = 24$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Rightarrow 0,30 = \frac{v_4}{80} \Rightarrow v_4 = 24$$

$$f_5 = \frac{v_5}{v} \Rightarrow 0,10 = \frac{v_5}{80} \Rightarrow v_5 = 8$$

Άρα, οι πωλητές που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό είναι $24 + 8 = 32$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Είναι $f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}$, $x \in \mathbb{R}$




$$f'(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \left(\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)\right)' = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \left(\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{3}x\left(2x - \frac{11}{10}\right)\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{30}x + \frac{2}{15} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{30}x\right) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right) = 0 \\ e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} = 0 \Rightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 2 = 121 - 120 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 1}{2 \cdot 15} = \begin{cases} \frac{11+1}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \\ \frac{11-1}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$	
f'(x)	+	○	-	○	+
f(x)					

Στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ η f γνησίως αύξουσα

Στο διάστημα $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$ η f γνησίως φθίνουσα

Στο διάστημα $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$ η f γνησίως αύξουσα

Δ2.

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

οπότε $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$

Έχουμε όμως $A \subseteq B$ οπότε προκύπτει:

$$A \cup B = B \Rightarrow P(A \cup B) = P(B) = \frac{2}{5}$$

$$A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$

Δ3.

Είναι $h(x) = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)}$, $x \in \mathbb{R}$

α.

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)} \quad e^{x \cdot \gamma \nu. \alpha \upsilon \xi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow 5x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = 3x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) - 3x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow x\left[5x^2 - \frac{11}{2}x + 2 - \frac{9x^2}{2} + 3x + 1\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 = 0\right) \Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Δ3.

β.

Για $x_1 < x_2 < x_3$ είναι

$$x_1 = 0$$

↓

$$v_1 = 2x_1 + 1 \Rightarrow v_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

↓

$$v_2 = 2x_2 + 1 \Rightarrow v_2 = 5$$

$$x_3 = 3$$

↓

$$v_3 = 2x_3 + 1 \Rightarrow v_3 = 7$$

Οπότε η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v_1 + v_2 + v_3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{1 + 5 + 7} = \frac{10 + 21}{13} = \frac{31}{13}$$

Επιμέλεια :

Μυλωνίδης Σ.

Τάνης Σ.

Ηλιάδης Κ.

Μαργαριτέλη Ε.

Μπατζίνας Ν.

Πασχαλίδου Ξ.

Σαμαρά Φ.

Σιβένα Σ.