ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΙΟΥ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α.1
Θεωρία σχολικού σελ. 304
Α.2
Θεωρία σχολικού σελ.279
Α.3
Θεωρία σχολικού σελ.273
Α.4
α)Σ
β)Σ
γ)Λ
δ)Λ
ε)Σ

Θέμα Β

Β.1

$$z+\frac{2}{z}=2 \overset{z\neq 0}{\Rightarrow} z^2+2=2z \Rightarrow z^2-2z+2=0$$

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 2=4-8=-4<0$$

$$z_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 2i}{2}=\frac{\cancel{2}(1\pm i)}{\cancel{2}}=\begin{cases}1+i\\1-i\end{cases}$$

Β.2

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$$

$$\text{Είναι}\quad z_1^2=(1+i)^2=\cancel{1}+2i-\cancel{1}=2i$$

$$z_2^2=(1-i)^2=\cancel{1}-2i-\cancel{1}=-2i$$

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=\left(z_1^2\right)^{1005}+\left(z_2^2\right)^{1005}=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=\left(2i\right)^{1005}-\left(2i\right)^{1005}=0$$

Β.3

$|w-4+3i|=|z_1-z_2|$

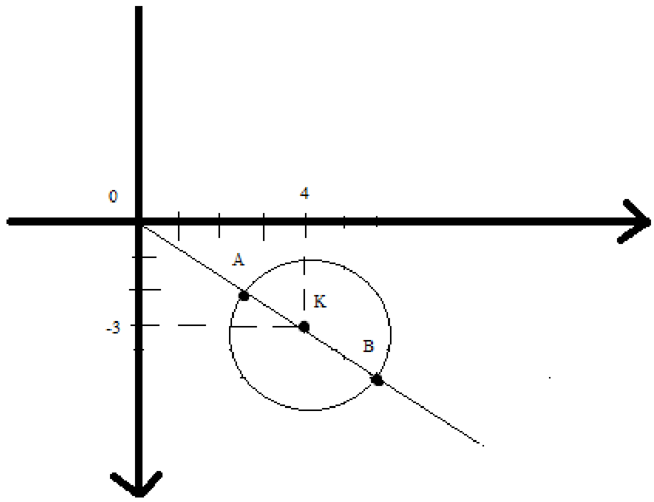
Το $|z_1-z_2|$ είναι η απόσταση των εικόνων των z_1 και z_2 δηλαδή των σημείων Α(1,1) και Β(1,-1)

$(\mathrm{AB})=\sqrt{(1-1)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{0+2}=\sqrt{4}=2$

Οπότε το $|w-4+3i|=2$ είναι κύκλος με κέντρο το Κ(4,-3) και ακτίνα ρ=2

Β.4

Ν.δ.ο. $3\le|w|\le 7$



Είναι $(OK)=\sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

Οπότε $|w|_{\min}=|(OK)-\rho|=|5-2|=3$

Και $|w|_{\max}=(OK)+\rho=5+2=7$

Θέμα Γ

$f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in R$

Γ.1

$$f'(x)=2+\frac{1}{x^2+1}\left(x^2+1\right)'=\frac{2}{1}+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2x^2+2x+2}{x^2+1}=\frac{2\left(x^2+x+1\right)}{x^2+1}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2\left(x^2+x+1\right)}{x^2+1}=0\Rightarrow x^2+x+1=0$$

$$\Delta=1-4\cdot1\cdot1=-3<0$$

$\acute{\alpha}\rho\alpha$ για κάθε $x\in R \quad x^2+x+1>0$ και $x^2+1>0$

οπότε $\quad f'(x)>0\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο R

Γ.2

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]\Rightarrow 2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln\left(x^4+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-2(3x-2)=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln\left(x^4+1\right)\Rightarrow 2x^2+\ln\left[\left(x^2\right)^2+1\right]=2(3x-2)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(x^2\right)=f(3x-2)\ \underset{f\,1-1}{\overset{f\ \gamma\nu.\,\alpha\upsilon\xi.}{\Rightarrow}}\ x^2=3x-2\Rightarrow x^2-3x+2=0\left\langle\begin{array}{l}x_1=1\\ x_2=2\end{array}\right.$$

Γ.3

$$f''(x)=\frac{(4x+2)\left(x^2+1\right)-\left(2x^2+2x+2\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x^3+4x+2x^2+2-4x^3-4x^2-4x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow-2x^2+2=0\Leftrightarrow 2x^2=2\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$$

$f''(x)>0\Rightarrow-2x^2+2>0\Rightarrow x\in(-1,1)$ (πρόσημο τριωνύμου)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''(x)		—	0	+	0	—	
f(x)		⌒	Σ.Κ	⌣	Σ.Κ	⌒	

Η f παρουσιάζει στο $x_0=-1$ σημείο καμπής με τιμή $f(-1)=2\cdot(-1)+\ln\left((-1)^2+1\right)=-2+\ln 2$

Η f παρουσιάζει στο $x_0=1$ σημείο καμπής με τιμή $f(1)=2\cdot 1+\ln(1^2+1)=2+\ln 2$

Είναι $f'(-1)=\dfrac{2\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+2}{(-1)^2+1}=\dfrac{2-\cancel{2}+\cancel{2}}{2}=1$

εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(-1,\ln 2-2)$ $\parallel$ $y-(\ln 2-2)=f'(-1)(x+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow y-\ln 2+2=1\cdot(x+1)\Rightarrow y=x+1-2+\ln 2$

$\varepsilon_1: y=x-1+\ln 2$

Είναι $f'(1)=\dfrac{2\cdot 1+2\cdot 1+2}{1+1}=\dfrac{6}{2}=3$

εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $B(1,\ln 2+2)$ $\parallel$ $y-(\ln 2+2)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow y-\ln 2-2=3(x-1)\Rightarrow y-\ln 2-2=3x-3\Rightarrow y=3x-3+2+\ln 2$

$\varepsilon_2: y=3x-1+\ln 2$

Λύνω το σύστημα ε_1, ε_2

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &: y=x-1+\ln 2\\ \varepsilon_2 &: y=3x-1+\ln 2\end{aligned}\right| \Rightarrow x-\cancel{1}+\cancel{\ln 2}=3x-\cancel{1}+\cancel{\ln 2}$$

$$2x=0\Rightarrow \boxed{x=0}$$

Άρα το σημείο τομής των δύο εφαπτομένων είναι το σημείο Γ(0, ln2-1) το οποίο είναι σημείο του άξονα yy’

<u>Γ.4</u>

$$I=\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}x(2x+\ln(x^2+1))dx=\int_{-1}^{1}(2x^2+x\ln(x^2+1))dx$$

$$=\int_{-1}^{1}2x^2dx+\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)dx$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)'\ln(x^2+1)dx$$

$$=2\left(\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right)+\frac{1}{2}\left[(x^2+1)\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\cancel{(x^2+1)}\cdot\frac{2x}{\cancel{x^2+1}}dx$$

$$=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left[(\cancel{2\ln 2}-\cancel{2\ln 2})-\int_{-1}^{1}2xdx\right]$$

$$=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right)=\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$$

<u>Θέμα Δ</u>

$f(x)\neq x$

$$f(x)-x=3+\int_0^x\frac{t}{f(t)-t}dt\Rightarrow f(x)=3+x+\int_0^x\frac{t}{f(t)-t}dt \quad (1)$$

<u>Δ.1</u>

Η $f(t)$ συνεχής στο R και $f(t)-t$ συνεχής στο R ως διαφορά συνεχών.

Ακόμη $\frac{t}{f(t)-t}$ συνεχής στο R ως πηλίκο συνεχών άρα και το $\int_0^x\frac{t}{f(t)-t}dt$ παραγωγίσιμο στο R, $3+x$ παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική άρα και η $f(x)$ παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Παραγωγίζουμε την (1) σχέση

$$f'(x)=1+\frac{x}{f(x)-x}=\frac{f(x)-x+x}{f(x)-x}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x}\ ,\ x\in R \quad (2)$$

<u>Δ.2</u>

Για να δείξουμε ότι η g είναι σταθερή αρκεί $g'(x)=0$

$g(x)=\left(f(x)\right)^2-2xf(x)$

οπότε $g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)-2f(x)-2xf'(x)\overset{(2)}{=}2f'(x)\left(f(x)-x\right)-2f(x)=2f(x)-2f(x)=0$

Άρα $g(x)=c$

Απο (2) *έχουμε* $f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x}\Leftrightarrow f'(x)\left(f(x)-x\right)=f(x)$

<u>Δ.3</u>

Ά τρόπος

Έχουμε g(x)=c

Για x=0 η (1) γίνεται f(0)=3

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=c \\ g(x)=(f(x))^2-2xf(x) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$(f(x))^2-2xf(x)=c$$

x=0 $\quad (f(0))^2-2\cdot 0 f(0)=c \Rightarrow 3^2=c \Rightarrow \boxed{c=9}$

$$(f(x))^2-2xf(x)=9 \Rightarrow$$
$$(f(x))^2-2xf(x)-9=0$$
$$f^2(x)-2xf(x)=9 \Rightarrow^{(+x^2)}$$
$$f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9$$
$$\left(f(x)-x\right)^2=x^2+9 \Rightarrow f(x)-x=\pm\sqrt{x^2+9} \Rightarrow f(x)=x\pm\sqrt{x^2+9}$$

Όμως επειδή f(0) = 3 > 0

Άρα $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$

ή ΄Β τρόπος

$$f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x} \Rightarrow f'(x)\left(f(x)-x\right)=f(x)$$

$$f'(x)\cdot f(x)-xf'(x)=f(x)$$
$$f'(x)\cdot f(x)=f(x)+xf'(x)$$
$$\left(f^2\frac{(x)}{2}\right)'=(xf(x))'$$
$$f^2\frac{(x)}{2}=xf(x)+c$$

x=0

$$f^2\frac{(0)}{2}=0\cdot f(0)+c \Rightarrow \frac{9}{2}=c$$
$$f^2\frac{(x)}{2}=xf(x)+\frac{9}{2} \Rightarrow f^2(x)=2xf(x)+9$$
$$f^2(x)-2xf(x)=9 \Rightarrow^{(+x^2)}$$
$$f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9$$
$$\left(f(x)-x\right)^2=x^2+9 \Rightarrow f(x)-x=\pm\sqrt{x^2+9} \Rightarrow f(x)=x\pm\sqrt{x^2+9}$$

Όμως επειδή f(0) = 3 > 0

Άρα $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$

Δ.4

Έστω $g(x)=\int_{x}^{x+1} f(t)\,dt$

Είναι $\int_{x}^{x+1} f(t)\,dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)\,dt \Leftrightarrow g(x)<g(x+1)$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $g(x)<g(x+1)$ ή $g(x+1)-g(x)>0$

Όμως

$$g(x)=\int_{x}^{x+1} f(t)\,dt=\int_{x}^{\alpha} f(t)\,dt+\int_{\alpha}^{x+1} f(t)\,dt=-\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt+\int_{\alpha}^{x+1} f(t)\,dt$$

Οπότε $g'(x)=-f(x)+f(x+1)$ (1)

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την g στο διάστημα $[x,x+1]$

- Η g συνεχής στο $[x,x+1]$
- Η g παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$

Από Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(x+1)-g(x)}{\cancel{x}+1-\cancel{x}}=g(x+1)-g(x)$$

Είναι

$f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, $x\in R$

$$f'(x)=1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=0\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=-1\Rightarrow x=-\sqrt{x^2+9}\overset{x<0}{\Rightarrow} x^2=x^2+9\Rightarrow 0=9 \text{ αδύνατο}$$

Θ.δ.ο. $\sqrt{x^2+9}+x>0$

Είναι $\sqrt{x^2+9}+x>\sqrt{x^2}+x\geq|x|+x\geq 0\Rightarrow|x|\geq -x$ που ισχύει

Άρα $\sqrt{x^2+9}+x>0$

Οπότε $f'(x)>0\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα

Έχουμε

$$x<x+1\overset{f\ \text{γν.αύξ.}}{\Rightarrow} f(x)<f(x+1)\Rightarrow f(x+1)-f(x)>0\overset{(1)}{\Rightarrow} g'(x)>0\overset{x=\xi}{\Rightarrow} g'(\xi)>0$$

Συνεπώς $g'(\xi)>0\Rightarrow g(x+1)-g(x)>0\Rightarrow g(x+1)>g(x)$ άρα αποδείχτηκε.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
Μυλωνίδης Σ. , Τάνης Σ. , Ηλιάδης Κ.