ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΜΑΙΟΥ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

A1. Απόδειξη σελ. 93 σχολικού βιβλίου

A2. Ορισμός σελ. 86-87 σχολικού βιβλίου

A3. Ορισμός σελ. 140 σχολικού βιβλίου

A4. Α) Σ
Β) Λ
Γ) Σ
Δ) Λ
Ε) Λ

Θέμα Β

$f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1,\ A_f = \mathbb{R}$

B1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} 2\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1} = 2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} =$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} = 2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} =$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2-1+1}+1} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1}+1} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

Β2.

$\lambda = f'(0)$

$$f'(x) = \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-x+1}}\cdot\left(x^2-x+1\right)' - 0 = \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\cdot(2x-1) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$f'(0) = \frac{2\cdot 0-1}{\sqrt{0-0+1}} = \frac{-1}{1} = -1$$

Β3.

$$\lambda = f'(0) = \varepsilon\varphi\omega \Rightarrow -1 = \varepsilon\varphi\omega \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega = \frac{3\pi}{4}$$

Θέμα Γ

Γ1.

Η πρώτη κλάση είναι [0,c) ενώ η δεύτερη είναι [c,c+c) ή [c,2c)

Ισχύει ότι το κέντρο της δεύτερης κλάσης είναι $6 = \frac{c+2c}{2} \Rightarrow 12 = 3c \Rightarrow c = \frac{12}{3} \Rightarrow c = 4$

Γ2.

[,)	x_i	v_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
[0,4)	2	20	40	80
[4,8)	6	40	240	1440
[8,12)	10	45	450	4500
[12,16)	14	30	420	5880
[16.20)	18	25	450	8100
Σύνολο	-	160	1600	20.000

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{1600}{160} = 10$$

Είναι $S^2 = \frac{1}{v}\left[\sum x_i v_i - \frac{\left(\sum x_i v_i\right)^2}{v}\right] = \frac{\sum x_i^2 v_i}{v} - \frac{\left(\sum x_i v_i\right)^2}{v^2} = \frac{\sum x_i^2 v_i}{v} - \left(\bar{x}\right)^2 =$

$$= \frac{20.000}{160} - 10^2 = 125 - 100 = 25$$

Άρα η τυπική απόκλιση $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{25} = 5$

Γ3.

Είναι $CV=\frac{S}{\bar{x}}\cdot 100=\frac{5}{10}\cdot 100=\frac{1}{2}\cdot 100=50\%>10\%$, Δεν είναι ομοιογενές.

Γ4.

Θεωρούμε ότι η κατανομή είναι ομοιόμορφη.

Η κλάση [4,8) έχει πλάτος 4 και πλήθος 40 άτομα

Θέλουμε [7,8) σε πλάτος 1 οπότε πλήθος x_1 άτομα

Άρα $4x_1=40\Rightarrow x_1=10$ άτομα

Η κλάση [8,12) έχει πλάτος v_3=45 άτομα

Η κλάση [12,16) έχει πλάτος 4 και πλήθος 30 άτομα

Θέλουμε [12,14) σε πλάτος 2 οπότε πλήθος x_2 άτομα

Άρα $4x_2=2\cdot 30\Rightarrow 4x_2=60\Rightarrow x_2=15$ άτομα για το ενδεχόμενο Α

Συνολικά είναι από [7,14) $x_1+v_3+x_2=10+45+15=70$ άτομα

Οπότε η $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{70}{160}=\frac{7}{16}$

Θέμα Δ

$$f(x)=\ln\left(x-P(A)\right)-\frac{1}{2}\left(x-P(A)\right)^2+P(B),\ x>P(A)$$

Δ1.

$$f'(x)=\frac{1}{x-P(A)}\left(x-P(A)\right)'-\frac{1}{2}\cdot 2\left(x-P(A)\right)\left(x-P(A)\right)'+0=\frac{1}{x-P(A)}\cdot 1-\left(x-P(A)\right)\cdot 1=$$

$$=\frac{1}{x-P(A)}-\frac{x-P(A)}{1}=\frac{1-\left(x-P(A)\right)^2}{x-P(A)}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\left(x-P(A)\right)^2}{x-P(A)}=0\Rightarrow 1-\left(x-P(A)\right)^2=0\Rightarrow\left(x-P(A)\right)^2=1\Rightarrow$$

$$x-P(A)=\pm 1\left\langle\begin{array}{l}x-P(A)=1\Rightarrow x=1+P(A)\\ x-P(A)=-1\Rightarrow x=-1+P(A),\text{απορρίπτεται διότι } x>P(A)\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0 \Rightarrow \dfrac{1-\left(x-P(A)\right)^2}{x-P(A)}>0 \\ x>P(A) \Rightarrow x-P(A)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-\left(x-P(A)\right)^2>0 \Rightarrow 1-\left(x^2-2P(A)x+P^2(A)\right)>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2+2P(A)x+1-P^2(A)>0$$

τριώνυμο οπότε το πρόσημό του ετερόσημο του α = -1 εντός των ριζών και ομόσημο εκτός

x		P(A) - 1		P(A)		P(A) + 1	
f ' (x)	−	0	+	‖	+	0	−
f(x)				‖	↗		↘

Η f παρουσιάζει στο $x_0 = P(A)+1$ τοπικό μέγιστο με τιμή

$$f\left(P(A)+1\right)=\ln\left(P(A)+1-P(A)\right)-\frac{1}{2}\left(P(A)+1-P(A)\right)^2+P(B)=\ln 1-\frac{1}{2}+P(B)=P(B)-\frac{1}{2}$$

Η f στο διάστημα $\left(P(A), P(A)+1\right]$ είναι γνησίως αύξουσα και

στο $\left[P(A)+1, +\infty\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ2.

$$f'\left(\frac{5}{3}\right)=0 \Rightarrow \frac{1-\left(\frac{5}{3}-P(A)^2\right)}{\frac{5}{3}-P(A)}=0 \Rightarrow 1-\left(\frac{5}{3}-P(A)\right)^2=0 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}-P(A)\right)^2=1 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{3}-P(A)=\pm 1 \begin{cases} \frac{5}{3}-P(A)=1 \Rightarrow P(A)=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3}-P(A)=-1 \Rightarrow P(A)=\frac{5}{3}+1>1, \text{απορρίπτεται} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right)=0 \Rightarrow \ln\left(\frac{5}{3}-P(A)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}-P(A)\right)^2+P(B)=0 \Rightarrow \ln\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+P(B)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{3}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1^2+P(B)=0 \Rightarrow \ln 1-\frac{1}{2}+P(B)=0 \Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}$$

Δ3.

Είναι $P(A)=\frac{2}{3}$ $\quad P(B)=\frac{1}{2}$ $\quad P(A\cup B)=\frac{5}{6}$

Οπότε

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}-\frac{5}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\quad (1)$$

Οπότε $P\left((A\cap B)'\right)=1-P(A\cap B)\overset{(1)}{=}1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Δ4.

$$P\left((A-B)\cup(B-A)\right)=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$