ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΙΟΥ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α)
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ Α**

Α1. Σελ 175 σχολικό βιβλίο

Α2

(α) Λ
(β) Σ
(γ) Σ
(δ) Λ

Α3 α) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

β) $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

γ) $\left(e^x\right)'=e^x$

δ) $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

Β1

| $X_1$ | $v_i$ | $f_i$ % | $N_i$ | $F_i$ % | $x_i v_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 8 | 16 | 8 | 16 | 0 |
| 1 | 10 | 20 | 18 | 36 | 10 |
| 2 | 15 | 30 | 33 | 66 | 30 |
| 3 | 10 | 20 | 43 | 86 | 30 |
| 4 | 5 | 10 | 48 | 96 | 20 |
| 5 | 2 | 4 | 50 | 100 | 10 |
| Αθροίσματα | 50 | 100 | - | - | 100 |

Είναι
$$V_0+V_1+V_2+V_3+V_4+V_5=50\Rightarrow$$
$$8+10+V_2+10+5+2=50\Rightarrow$$
$$35+V_2=50\Rightarrow V_2=15$$

$f_0 = \frac{8}{50} = \frac{16}{100} = 0,16$

$f_1 = \frac{10}{50} = \frac{20}{100} = 0,20$

$f_2 = \frac{15}{50} = \frac{30}{100} = 0,30$

$f_3 = \frac{10}{50} = 0,20$

$f_4 = \frac{5}{50} = \frac{10}{100} = 0,10$

$f_5 = \frac{2}{50} = \frac{4}{100} = 0,04$

**B2.** Είναι $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i v_i}{v} = \frac{100}{50} = 2$

**B3.** Είναι $\delta = \frac{X_{25} + X_{26}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$

**B4.** Το πλήθος είναι $V_2 + V_3 + V_4 = 30$

Το πλήθος είναι $f_2 + f_3 + f_4 = 60\%$

**ΘΕΜΑ Γ**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & x < 1 \\ \sqrt{x+3} + \alpha & x \geq 1 \end{cases}$$

**Γ1.** $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{2} = -1$

$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right.$

**Γ2.** $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (\sqrt{x+3} + \alpha) = \sqrt{1+3} + \alpha = 2 + \alpha$

**Γ3.** f συνεχής στο $x_o=1 \Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1^-} f(x)=-1$

$\lim_{x\to1^+} f(x)=2+\alpha$

$f(1)=2+\alpha$

$-1=2+\alpha$

$\alpha=-3$

**Γ4.**

$f(0)=\dfrac{0^2-4\cdot0+3}{0^2-1}=\dfrac{3}{-1}=-3$

$f(6)=\sqrt{6+3}-3=\sqrt{9}-3=0$

$A=3f(0)+2f(6)=3\cdot(-3)+2\cdot0=-9$

**ΘΕΜΑ Δ**

Είναι $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+\alpha x+\beta$ και $f'(x)=\dfrac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}x^2-\dfrac{5}{\cancel{2}}\cancel{2}x+\alpha=x^2-5x+\alpha$

**Δ₁.**

$\left.\begin{array}{l}\text{Η f έχει ακρότατο στο } x_0=2 \Rightarrow f'(2)=0\\ \text{Το } A(0\ ,\ 1) \text{ ανήκει στην } C_f \Rightarrow f(0)=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}2^2-5\cdot2+\alpha=0\\ \dfrac{1}{3}\cdot0^3-\dfrac{5}{2}\cdot0^2+\alpha\cdot0+\beta=1\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}4-10+\alpha=0\\ \beta=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=6\\ \beta=1\end{array}\right.$

**Δ₂.** Άρα $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x+1$ και $f'(x)=x^2-5x+6$

Πεδίο ορισμού $A=R$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0$

Έχει $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$

Και λύσεις $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\dfrac{5\pm1}{2}=\left\langle\begin{array}{l}x_1=\dfrac{6}{2}=3\\ \\ x_2=\dfrac{4}{2}=2\end{array}\right.$

Το πρόσημο της f ΄ είναι το πρόσημο του τριωνύμου $x^2-5x+6$

| $x$ | $-\infty$ | 2 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |
| | | Τ.Μ | | Τ.Ε | |

Η f στο $(-\infty\,,\,2]$ είναι γνησίως αύξουσα
Η f στο $[2\,,\,3]$ είναι γνησίως φθίνουσα
Η f στο $[3\,,\,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα

**Δ3.**
Η f έχει στο $x_0=2$ τοπικό μέγιστο με τιμή

$$f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{5}{2}\cdot 2^2+6\cdot 2+1=\frac{1}{3}8-\frac{5}{\cancel{2}}\cancel{4}^2+12+1=\frac{8}{3}+3=\frac{17}{3}$$

Η f έχει στο $x_0=3$ τοπικό ελάχιστο με τιμή

$$f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{5}{2}\cdot 3^2+6\cdot 3+1=\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{27}^9-\frac{5}{2}9+18+1=28-\frac{45}{2}=\frac{11}{2}$$

**Δ4.** $$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+1\right)dx=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{5}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\cancel{6}^3\frac{x^2}{\cancel{2}}+x\right]_1^2=$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2^4}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1^4}{4}-\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{2^3}{3}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1^3}{3}\right)+3\cdot 2^2-3\cdot 1^2+2-1=\frac{16}{12}-\frac{1}{12}-\left(\frac{40}{6}-\frac{5}{6}\right)+12-3+2-1=$$

$$=\frac{15}{12}-\frac{35}{6}+10=\frac{15}{12}-\frac{70}{12}+\frac{120}{12}=\frac{65}{12}$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Α.Τάνης , Σ.Μυλωνίδης