Προτεινόμενες Απαντήσεις
Μαθηματικά Κατεύθυνσης 20/05/2009

Θέμα 1ο

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 251

Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 213

Γ.
α. Σ
β. Σ
γ. Λ
δ. Λ
ε. Λ

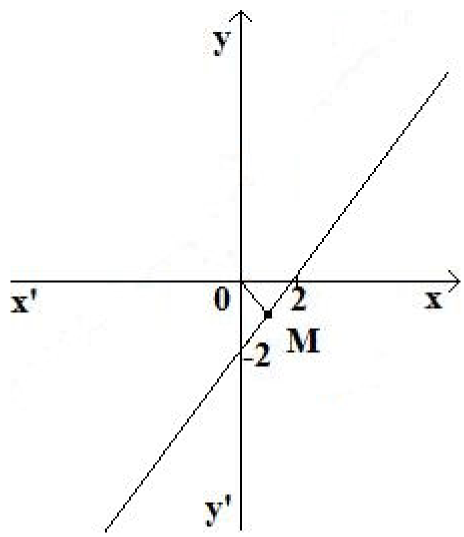
Θέμα 2ο

$z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i$

Α. α.

$$\left.\begin{array}{r} z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i \\ z=x+yi \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=2\lambda+1 \Rightarrow 2\lambda=x-1 \Rightarrow \lambda=\dfrac{x-1}{2} \\ y=2\lambda-1 \Rightarrow y=2\cdot\dfrac{x-1}{2}-1 \Rightarrow (\varepsilon): y=x-2 \end{array}$$

β.



Φέρουμε κάθετη από την αρχή των αξόνων στην ευθεία (ε). Ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο βρίσκεται στη θέση Μ.

ε: $y=x-2$

ΟΜ : $y=\lambda x$

$OM\perp\varepsilon \Rightarrow \lambda_{OM}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1$ και επειδή $\lambda_{\varepsilon}=1$ τότε $\lambda_{OM}=-1$.

Άρα ΟΜ: $y=-x$

$$\left.\begin{array}{r} y=-x \\ y=x-2 \end{array}\right\} \Rightarrow -x=x-2 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \text{ και επειδή}$$

$y=-x \Rightarrow y=-1$ Άρα ο μιγαδικός είναι ο $z_o=1-1i$

Β.

$|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_o \Rightarrow w\overline{w} + \overline{w} - 12 = z_o \Rightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι: $y = 1$ οπότε: $x^2 + y^2 + x - 12 = 1 \overset{y=1}{\Rightarrow} x^2 = 1 + x - 13 = 0$

$\Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$, $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -4$

Άρα $\begin{matrix} x_1 = 3 \\ y = 1 \end{matrix}$ $\quad \kappa\alpha\iota \quad$ $\begin{matrix} x_2 = -4 \\ y = 1 \end{matrix}$ δηλαδή μιλάμε για τους εξής μιγαδικούς:

$w_1 = 3 + i, \quad w_2 = -4 + i$

Θέμα 3$^{\text{ο}}$

$f(x) = a^x - \ln(x+1) \quad$ x > -1, $\quad$ α>0, $a \neq 1$

Α.

$f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(1) \Rightarrow$ Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_o = 0$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$. Άρα

Από θεώρημα Fermat $f'(0) = 0$

$f'(x) = a^x \ln a - \dfrac{1}{x+1}$

$f'(0) = 0 \Rightarrow a^0 \ln a - \dfrac{1}{1} = 0 \Rightarrow 1 \cdot \ln a - 1 = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow \ln a = \ln e \Rightarrow a = e$

Β.

α.

Για α = e

$f(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$

$\left.\begin{matrix} f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2} \\ e^x > 0, \ (x+1)^2 > 0 \end{matrix}\right\} f''(x) > 0 \Rightarrow f \ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}$

β.

$f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{e^x(x+1) - 1}{x+1}$ ονομάζω τον αριθμητή h(x) και έχω:

$h(x) = e^x(x+1) - 1$

Για x = 0 $\quad h(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ προφανή ρίζα

$h'(x) = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2)$

$h'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x+2) = 0 \overset{e^x>0}{\Rightarrow} x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$ απορρίπτεται.

	-1	0	+∞
h΄(x)	+	o	+
h (x)	↗		↗

$h'(x) = (x+2)e^x > 0$

$x > -1 \Rightarrow x+2 > 1$

Και $e^x > 0$

Άρα για x > 0 $\overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x) > h(0) \Rightarrow h(x) > 0$ και

$-1 < x < 0 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x) < h(0) \Rightarrow h(x) < 0$

Οπότε

	-1	0	+∞
f΄(x)	-	o	+
f (x)	↘	T E	↗

Από Τ.Ε. έχουμε ότι $f(0) \le f(x) \Rightarrow f(x) \ge 1$ για $x > -1$

Η f είναι στο (-1,0] γνησίως φθίνουσα και
Στο $[0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα

γ.

$\beta, \gamma \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$

$\dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \overset{\cdot(x-1)(x-2)}{\Rightarrow} (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1) = 0$

Έστω $h(x) = (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1)$, Η h(x) είναι συνεχής στο [1,2] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$\left.\begin{array}{l} h(1) = -(f(\beta)-1) < 0 \\ h(2) = f(\gamma)-1 > 0 \end{array}\right\}$ Όμως $f(x) \ge 1$ η ισότητα ισχύει μόνο για $x_o = 0$ δηλαδή f(x)>1 για κάθε

$x \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$ οπότε $\begin{array}{l} f(\beta) > 1 \Rightarrow f(\beta)-1 > 0 \\ f(\gamma) > 1 \Rightarrow f(\gamma)-1 > 0 \end{array}$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο ότι: $h(1) \cdot h(2) < 0 \Rightarrow$ Από Θ.Β. υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ ώστε $h(x_0) = 0$

Θέμα 4ο

f συν [0,2]

$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$

$H(x) = \int_0^x t\cdot f(t)dt, \quad x\in[0,2]$

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3 & x\in(0,2] \\ 6\lim\limits_{t\to o}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} & x = 0 \end{cases}$$

α. Για $x\in(o,2]$ η $G(x) = \dfrac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3$ και είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών

Για x = 0 πρέπει $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = G(0)$

$$G(0) = 6\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} = 6\cdot\lim_{t\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-t^2})(1+\sqrt{1-t^2})}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})} = 6\lim_{t\to 0}\frac{1-(\sqrt{1-t^2})^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})} =$$

$$= 6\lim_{t\to 0}\frac{1-1+t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})} = 6\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})} = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$$

$$\lim_{x\to 0} G(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x} - \lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt + 3 \ (1)$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{1} = 0\cdot f(0) = 0$

Οπότε από $(1) \Rightarrow 0 - 0 + 3 = 3$

β. Για $x\in(0,2)$

$$\left.\begin{array}{l} G'(x) = \left(\dfrac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3\right)' = \dfrac{H'(x)x - H(x)}{x^2} \\ \text{Όμως} \quad H'(x) = xf(x) \end{array}\right\} \Rightarrow G'(x) = \frac{x^2 f(x) - \int_0^x tf(t)dt}{x^2} - f(x) =$$

$$= \frac{x^2 f(x) - \int_0^x tf(t)dt - x^2 f(x)}{x^2} = \frac{-\int_0^x tf(t)dt}{x^2} = -\frac{H(x)}{x^2}$$

γ. Η G είναι συνεχής στο [0,2]
Η G είναι παραγωγίσιμη στο (0,2)
G(0) = 3

$$G(2)=\frac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3 \qquad (1)$$

Όμως $H(2)=\int_0^2 tf(t)dt$ και $\int_0^2 (t-2)f(t)dt=0 \Rightarrow \int_0^2 (tf(t)-2f(t))dt=0 \Rightarrow$

$$\int_0^2 tf(t)dt-\int_0^2 2f(t)dt=0 \Rightarrow \int_0^2 tf(t)dt=2\int_0^2 f(t)dt \quad *$$

Οπότε η (1) γράφεται: $(1) \Rightarrow G(2)=\frac{1}{2}\int_0^2 tf(t)dt-\int_0^2 f(t)dt+3 \overset{*}{=} \frac{1}{2}2\int_0^2 f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt+3=$

$$\int_0^2 f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt+3=3$$

Άρα G(0)=G(2)

Από Θ.Roll υπάρχει $a\in(0,2)$ ώστε $\left.\begin{array}{l} G'(a)=0 \\ G'(x)=-\dfrac{H(x)}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\dfrac{H(a)}{a^2}=0 \Rightarrow -H(a)=0 \Rightarrow H(a)=0$

δ.
Η G είναι συνεχής στο [0,0]
Η G είναι παραγωγίσιμη στο (0,α)
G(0) = 3

$$G(a)=\frac{H(a)}{a}-\int_0^\alpha f(t)dt+3 \overset{H(a)=0}{\Rightarrow} G(a)=-\int_0^\alpha f(t)dt+3$$

Από ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in(0,a)$ ώστε

$$G'(\xi)=\frac{G(a)-G(0)}{a-0}=\frac{-\int_0^a f(t)dt+3-3}{a-0}=\frac{-\int_0^a f(t)dt}{a}$$

Όμως $G'(\xi)=-\dfrac{H(\xi)}{\xi^2}=-\dfrac{\int_0^\xi tf(t)dt}{\xi^2}$

Άρα $-\dfrac{\int_0^\xi tf(t)dt}{\xi^2}=-\dfrac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha} \Rightarrow a\int_0^\xi tf(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$