# Προτεινόμενες Απαντήσεις
# Μαθηματικών Γενικής Παιδείας 18/5/09

## Θέμα 1ο

**Α.** Θεωρία σχολικό σελίδα 150
**Β.** Θεωρία σχολικό σελίδα 65
**Γ.**
α. Λ  β. Σ  γ. Λ  δ. Σ  ε. Σ

## Θέμα 2ο

Α.

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{1}^{4} x_i \nu_i \Leftrightarrow 4 = \frac{12 + 3\nu_2 + 5\cdot 3 + 8\cdot 4}{6 + \nu_2 + 3 + 4} \Leftrightarrow 4 = \frac{12 + 3\nu_2 + 15 + 32}{13 + \nu_2} \Leftrightarrow 52 + 4\nu_2 = 3\nu_2 + 59 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\nu_2 = 7}$$

**Β.**

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 \nu_i = \frac{(2-4)^2\cdot 6 + (3-4)^2\cdot 7 + (5-4)^2\cdot 3 + (8-4)^2\cdot 4}{20} = \frac{24 + 7 + 3 + 64}{20} =$$

$$= \frac{98}{20} = 4{,}9$$

Γ.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}\cdot 100\% = \frac{2{,}2}{4}\cdot 100 = 55\% > 10\%$$ άρα όχι ομοιογενές

$$s = \sqrt{4{,}9} \cong 2{,}2$$

## Θέμα 3ο

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$$

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$$

**Α.**

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + a$$

$f''(x) = 6x - 12$ Έχουμε:

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \Rightarrow 2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + a + 15 = 3x^2 \Rightarrow$$

$$12x - 24 + 3x^2 - 12x + a + 15 = 3x^2 \Rightarrow a - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 9}$$

**Β.**

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-12x+9}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-4x+3)}{x^2-1}\overset{*}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(x-3)}{(x+1)}=\frac{3(1-3)}{(1+1)}=\frac{3(-2)}{2}=-3$$

* $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$

**Γ.**

Η εξίσωση εφαπτομένης έχει τη μορφή:

$(\varepsilon)\quad y=\lambda x+\beta$ και επειδή είναι παράλληλη στην $(\varepsilon_1)$: $y=-3x$ έχουν $\lambda_\varepsilon=\lambda_{\varepsilon_1}\Rightarrow$ $\boxed{\lambda=-3}$

Οπότε η (ε) γίνεται: $y=-3x+\beta$

Όμως $\left.\begin{array}{r}\lambda=-3\\ \lambda=f'(x_0)\end{array}\right|\Rightarrow f'(x_0)=-3\Rightarrow 3x_0^3-12x_0+9=-3\Rightarrow 3(x_0^2-4x_0+3)=-3\Rightarrow$

$x_0^3-4x_0+4=0\Rightarrow (x_0-2)^2=0\Rightarrow \boxed{x_0=2}$

Το σημείο Μ $(x_0, f(x_0))=(2, f(2))$ είναι σημείο της εφαπτομένης και

$f(x)=x^3-6x^2+9x-7$

$f(2)=2^3-6\cdot 2^2+9\cdot 2-7=8\_24+18-7=26-31=-5$

Άρα $\left.\begin{array}{r}M(2,-5)\in\ \text{εφαπτομένη}\\ y=-3x+\beta\end{array}\right|\Rightarrow -5=-3\cdot 2+\beta\Rightarrow -5=-6+\beta\Rightarrow \boxed{\beta=1}$

Οπότε $\boxed{y=-3x+1}$

**<u>Θέμα 4ο</u>**

$$f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2,\qquad x>0$$

**Α. α.**

| | 0 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | + | | - |
| f(x) | ↗ | ΤΜ | ↘ |

Π.Ο. $=(0,+\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$

$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2-x}{2x}=0\Rightarrow 2-x=0\Rightarrow\boxed{x=2}$

$f'(x)>0\Rightarrow\frac{2-x}{2x}>0\overset{2x>0}{\Rightarrow}2-x>0\Rightarrow x<2$

Στο διάστημα (0,2] η f είναι **γνησίως αύξουσα.**

Στο διάστημα $[2,+\infty)$ η f είναι **γνησίως φθίνουσα**

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (που είναι και ολικό) στο $x_0 = 2$ με τιμή

$$f(2) = \ln 2 - \frac{2}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 2 - 1 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$$

**Β.**

**α.**

f(2), f(4), f(8), f(3), f(5)

$$2 < 3 < 4 < 5 < 8 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8)$$

Άρα οι τιμές είναι

f(8), f(5), f(4), f(3), f(2)

$$R = f(2) - f(8) = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1 - 3\ln 2 - \lambda^2 + 6\lambda + 2 = -2\ln 2 + 3 = \ln 2^{-2} + 3 = \ln\frac{1}{4} + 3$$

$$f(2) = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$$

$$f(8) = \ln 8 - \frac{8}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 2^3 - 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = 3\ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda - 2$$

$$\delta = f(4) = \ln 4 - \frac{4}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

**β.**

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$

$A = \{\lambda \in \Omega \,/\, R+\delta < -2\}$

$R + \delta < -2$

$$\ln\frac{1}{4} + 3 + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 3 + \ln 1 - \ln 4 + \ln 4 < -2 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0$$

$$\Delta = 36 - 4\cdot 1\cdot 5 = 36 - 20 = 16 \quad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1$$

| | 1 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|
| + | 0 | - | 0 | + |

$$\left.\begin{array}{r} \lambda \in (1,5) \\ \lambda \in \Omega \end{array}\right\} \lambda = 2, 3, 4$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100} = 0{,}03$$