ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ
26/05/2009

Θέμα 1ο

_Α.1._
Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 279

_Α.2._
Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 229

_Β._
1. Λ
2. Σ
3. Λ
4. Σ

Θέμα 2ο

$z_1 = 2+3i \qquad z_2 = (1-i)^2 + 3i^{2009} + 1$

_α._

$z_2 = (1-i)^2 + 3i^{2009} + 1 = 1 - 2i + i^2 + 3i + 1 = 1 + i$

$2009 = 502 \cdot 4 + 1$ άρα $i^{2009} = i^1 = i$

_β._

$\bar{z}_1 - z_2 = 2 - 3i - (1+i) = 2 - 3i - 1 - i = 1 - 4i$

$|\bar{z}_1 - z_2| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

_γ._

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1+i} = \frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i+3i-3i^2}{1-i^2} = \frac{5+i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$$

Θέμα 3ο

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+\beta & x\le 1 \\ 2x+3 & x>1 \end{cases}$$

α.

f συνεχής στο $x_0=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2+\beta)=a+\beta$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+3)=2\cdot 1+3=5$

$f(1)=\alpha+\beta$

Άρα από τα παραπάνω προκύπτει ότι $a+\beta=5$

β.

f παραγωγίσιμη στο $x_0=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax^2+\beta-a-\beta}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{a(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{a(x-1)(x+1)}{x-1}=2a$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+3-a-\beta}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+3-(a+\beta)}{x-1}\overset{a+\beta=5}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+3-5}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$2a=2\Rightarrow a=1$ και άρα $a+\beta=5\Rightarrow 1+\beta=5\Rightarrow \beta=4$

γ.

$g(x)=\frac{f(x)}{x},\quad x\neq 0$

Ψάχνουμε αν η συνάρτηση έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Η μορφή της Π.Α. είναι: $y=\lambda x+\beta$

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}(g(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+4}{x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}=0$$

Άρα η y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Επίσης για το $+\infty$ έχουμε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=0$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

Άρα η y = 2 οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Θέμα 4ο

$f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1$

I.

Εφόσον η f έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ από το θεώρημα Fermat $f'(1) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2\lambda x - 3$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2\lambda \cdot 1 - 3 = 0 \Rightarrow 3 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

II.

α.

Π.Ο. =

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	
			T.M		T.E		

Η f στο $(-\infty, -1]$ είναι γνησίως αύξουσα
[-1,1] είναι γνησίως φθίνουσα
[1,+∞) είναι γνησίως αύξουσα.

Ακόμη η f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + = -1 + 3 + 1 = 3$

Και η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό μέγιστο με τιμή $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

β.

Εξίσωση εφαπτομένης : $(\varepsilon) : y = \lambda x + \beta$

Η $\varepsilon // \varepsilon_1 : y = 9x \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda_\varepsilon = \lambda_{\varepsilon_1} \\ \lambda_{\varepsilon_1} = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_\varepsilon = 9$, δηλαδή (ε): y = 9x + β

Όμως $\left.\begin{array}{r} \lambda_\varepsilon = 9 \\ \lambda_\varepsilon = f'(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 9 \Rightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Rightarrow 3x_0^2 = 12 \Rightarrow x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = \pm 2$

Άρα για $x_0 = 2$

$f(x_0) = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$

$M_1(2,3)$

και $M_1 \in (\varepsilon) \Rightarrow 3 = 9 \cdot 2 + \beta \Rightarrow 3 = 18 + \beta \Rightarrow \beta = -15$

Οπότε $y = 9x - 15$

Και για $x_0 = -2$

$f(x_0) = f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1$

$M_2(-2,-1)$

και $M_2 \in (\varepsilon) \Rightarrow -1 = 9(-2) + \beta \Rightarrow -1 = -18 + \beta \Rightarrow \beta = 17$

Οπότε $y = 9x + 17$

γ.

Έχω $h(x) = f(x) - \sqrt{x}$

Η h(x) είναι συνεχής στο [0,1] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{h}(0) = \mathrm{f}(0) - 0 = 1 > 0 \\ \mathrm{h}(1) = \mathrm{f}(1) - 1 \overset{(*)}{=} -1 - 1 = -2 < 0 \end{array}\right\} \mathrm{h}(0) \cdot \mathrm{h}(1) < 0$$ οπότε κάνοντας χρήση του θεωρήματος Bolzano,

υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - \sqrt{x_0} = 0$

(*) $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$