ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 24 / 5 / 08

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1º

A₁. Θεωρία σχολ. βιβλίο σελ. 235

A₂. Θεωρία σχολ. βιβλίο σελ 191

B. $\alpha \to \Sigma$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Lambda$, $\delta \to \Lambda$, $\varepsilon \to \Sigma$

ΘΕΜΑ 2º

α. Έχουμε $\left|(i+2\sqrt{2})z\right| = 6 \Rightarrow \left|i+2\sqrt{2}\right|\cdot|z| = 6 \Rightarrow \sqrt{1^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}\cdot|z| = 6 \Rightarrow 3|z| = 6 \Rightarrow |z| = 2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του z είναι κύκλος με κέντρο Κ(0 , 0) και ακτίνα ρ = 2

β. Έστω $w = x+yi$. Έχουμε $|w-(1-i)| = |w-(3-i)| \Leftrightarrow |x+yi-3+i| = |x+yi-3+3i| \Leftrightarrow$

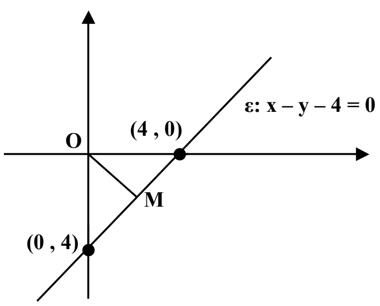
$\Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i| = |(x-3)+(y+3)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = (x-3)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}+2y+1 = \cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}+6y+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x-4y = 16 \overset{:4}{\Leftrightarrow} x-y = 4 \Leftrightarrow x-y-4 = 0$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του w είναι η ευθεία $x-y-4=0$

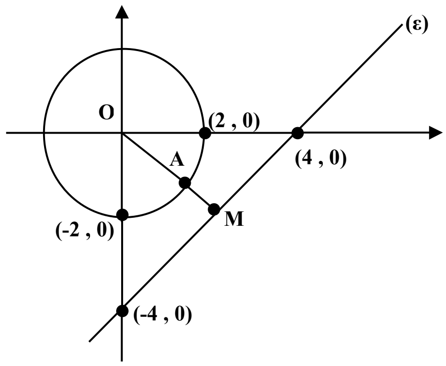
γ.



Η ελάχιστη απόσταση του $|w|$ είναι η απόσταση της (ε) από την αρχή των αξόνων δηλαδή :

$$|w|_{min} = (OM) = d_{(O,\varepsilon)} = \frac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

δ.



Έχουμε και τους δύο γεωμετρικούς τόπους των z και w δηλαδή τον κύκλο και την ευθεία και επειδή ισχύει

$$d_{(O,\varepsilon)} = 2\sqrt{2} > 2 = \rho$$

ο κύκλος και η ευθεία δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Οπότε $|z-w|_{min} = (AM) = |(OM)-(OA)| = |d_{(O,\varepsilon)} - \rho| =$ $= |2\sqrt{2}-2| = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$

<u>ΘΕΜΑ 3º</u>

α. Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Είναι f(0) = 0

$$\text{και } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot \ln x\right) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Άρα η f συνεχής στο $x_0 = 0$

β. Για x > 0 έχουμε $f(x) = x\cdot \ln x$ οπότε $f'(x) = \ln x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = \ln x + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Για x = 0 έχουμε $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}\cdot \ln x}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Οπότε

$$\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
f(x)	↘		↗

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $\left[0\,,\,\frac{1}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}\,,\,+\infty\right]$

Για το σύνολο τιμών έχουμε : $A = [0\,,\,+\infty] = \underset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu.}{\overset{A_1}{\left[0\,,\,\frac{1}{e}\right]}} \cup \underset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\overset{A_2}{\left[\frac{1}{e}\,,\,+\infty\right]}}$

Οπότε είναι $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)$

- $f(A_1)=f\left(\left[0\,,\,\frac{1}{e}\right]\right)\overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu.}{=}\left[f\left(\frac{1}{e}\right),\,f(0)\right]=\left[-\frac{1}{e}\,,\,0\right]$

  Είναι $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}\ln e^{-1}=-\frac{1}{e}$ και $f(0)=0$

- $f(A_2)=f\left(\left[\frac{1}{e}\,,\,+\infty\right]\right)\overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{=}\left[f\left(\frac{1}{e}\right),\,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right]=\left[-\frac{1}{e}\,,\,+\infty\right]$

  Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln x\right)=+\infty$

  Άρα $f(A)=\left[-\frac{1}{e}\,,\,+\infty\right)$

γ. Έχουμε $x=e^{\frac{\alpha}{x}}\Leftrightarrow\ln x=\ln e^{\frac{\alpha}{x}}\Leftrightarrow\ln x=\frac{\alpha}{x}\ln e\Leftrightarrow x\cdot\ln x=\alpha\Leftrightarrow x\cdot\ln x-\alpha=0$

Έστω $g(x)=x\cdot\ln x-\alpha=f(x)-\alpha$ με $A_g=\left(0\,,\,+\infty\right)$

Είναι $g'(x)=f'(x)=\ln x+1$

Έχουμε $g'(x)=0\Leftrightarrow\ln x+1=0\Leftrightarrow\ln x=-1\Leftrightarrow\ln x=\ln e^{-1}\Leftrightarrow x=e^{-1}$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Είναι $A_g=\left(0\,,\,+\infty\right)=\underbrace{\overset{A_1}{\left(0\,,\,e^{-1}\right]}}_{g\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu.}\cup\underbrace{\overset{A_2}{\left[e^{-1}\,,\,+\infty\right)}}_{g\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}$

➢ Είναι $g(A_1)=g\left(\left(0\,,\,e^{-1}\right]\right)\overset{g\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu.}{=}\left[g\left(e^{-1}\right),\,\lim\limits_{x\to0^+}g(x)\right)=\left[-\frac{1}{e}-\alpha\,,\,-\alpha\right)$

$g\left(e^{-1}\right)=e^{-1}\ln e^{-1}-\alpha=-\frac{1}{e}-\alpha$ και $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(f(x)-\alpha\right)=0-\alpha=-\alpha$

<u>Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :</u>

- Για $\alpha=0$ το $g\left(A_1\right)=\left[-\frac{1}{e}\,,\,0\right)$ <u>δεν</u> περιέχει το 0 άρα η g <u>δεν</u> έχει ρίζα
- Για $\alpha>0\Leftrightarrow-\alpha<0$ και $-\frac{1}{e}-\alpha<0$ το $g\left(A_1\right)=\left[-\frac{1}{e}-\alpha\,,\,-\alpha\right)$ <u>δεν</u> περιέχει το 0 άρα η g <u>δεν</u> έχει ρίζα

- Για $\alpha < -\frac{1}{e} \Leftrightarrow -\alpha - \frac{1}{e} > 0$ και $-\alpha > \frac{1}{e} > 0$ το $g(A_1) = \left[-\frac{1}{e} - \alpha \, , \, -\alpha\right)$ <u>δεν</u> περιέχει το 0 άρα η g <u>δεν</u> έχει ρίζα

- Για $-\frac{1}{e} < \alpha < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \Leftrightarrow -\alpha > 0 \\ -\frac{1}{e} < \alpha \Leftrightarrow -\frac{1}{e} - \alpha < 0 \end{cases}$ το $g(A_1) = \left[-\frac{1}{e} - \alpha \, , \, -\alpha\right)$ περιέχει το 0 άρα η g έχει τουλάχιστον μια ρίζα και επειδή η g γν. φθίνουσα η ρίζα μοναδική

- Για $\alpha = -\frac{1}{e}$ το $g(A_1) = \left[0 \, , \, -\frac{1}{e}\right)$ περιέχει το 0 άρα η g έχει τουλάχιστον μια ρίζα και επειδή η g γν. φθίνουσα η ρίζα μοναδική

➢ Όμοια είναι $g(A_2) = g\left(\left[e^{-1} \, , \, +\infty\right)\right) \overset{g \text{ γν.αύξ.}}{=} \left[g\left(e^{-1}\right) , \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) = \left[-\frac{1}{e} - \alpha \, , \, +\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \alpha\right) = +\infty$

<u>Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :</u>

- Για $\alpha = 0$ το $g(A_2) = \left[-\frac{1}{e} \, , \, +\infty\right)$ περιέχει το 0 άρα η g έχει τουλάχιστον μια ρίζα και επειδή η g γν. αύξουσα η ρίζα μοναδική

- Για $\alpha > 0 \Leftrightarrow -\alpha < 0$ και $-\frac{1}{e} - \alpha < 0$ το $g(A_2) = \left[-\frac{1}{e} - \alpha \, , \, +\infty\right)$ περιέχει το 0 άρα η g έχει τουλάχιστον μια ρίζα και επειδή η g γν. αύξουσα η ρίζα μοναδική

- Για $\alpha < -\frac{1}{e} \Leftrightarrow -\alpha - \frac{1}{e} > 0$ το $g(A_2) = \left[-\frac{1}{e} - \alpha \, , \, +\infty\right)$ <u>δεν</u> περιέχει το 0 άρα η g <u>δεν</u> έχει ρίζα

- Για $-\frac{1}{e} < \alpha < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{e} - \alpha < 0$ το $g(A_2) = \left[-\frac{1}{e} - \alpha \, , \, +\infty\right)$ περιέχει το 0 άρα η g έχει τουλάχιστον μια ρίζα και επειδή η g γν. αύξουσα η ρίζα μοναδική

- Για $\alpha = -\frac{1}{e}$ το $g(A_2) = \left[0 \, , \, +\infty\right)$ περιέχει το 0 άρα η g έχει τουλάχιστον μια ρίζα και επειδή η g γν. αύξουσα η ρίζα μοναδική

Οπότε συνολικά έχουμε :

- Για $\alpha = 0$ η $g(x)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$
- Για $\alpha > 0$ η $g(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$
- Για $\alpha < \frac{1}{e}$ η $g(x)$ δεν έχει ρίζα
- Για $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$ η $g(x)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες , μια στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ και μια στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$
- Για $\alpha = -\frac{1}{e}$ η $g(x)$ έχει μοναδική ρίζα (το ακρότατο της $g(x)$)

δ. Για $x > 0$ έχουμε $f(x) = x \cdot \ln x$ και $f'(x) = \ln x + 1$

Από το Θ. Μ. Τ. για την f στο $[x , x+1]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x , x+1)$ ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(x+1) - f(x) \quad \textbf{(1)}$$

Είναι $f'(\xi) = \ln\xi + 1$ και $f'(x+1) = \ln(x+1) + 1$

Όμως $x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \ln x < \ln\xi < \ln(x+1) \overset{+1}{\Leftrightarrow} \ln x + 1 < \underbrace{\ln\xi + 1}_{f'(\xi)} < \underbrace{\ln(x+1) + 1}_{f'(x+1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(\xi) < f'(x+1) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$

β΄τρόπος

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) = \frac{1}{x} \\ x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ κυρτή} \Rightarrow f' \text{ γνησίως αύξουσα}$$

Άρα για $x > 0$ είναι $x + 1 > x \overset{f' \text{γν.αύξ.}}{\Rightarrow} f'(x+1) > f'(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Ονομάζουμε $c = \int_0^2 f(t)dt$ οπότε έχουμε :

$$f(x) = \left(10x^3 + 3x\right)\cdot c - 45 \Rightarrow f(x) + 45 = \left(10x^3 + 3x\right)\cdot c \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 45dx = \int_0^2 \left(10x^3 + 3x\right)\cdot c \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c + 45[x]_0^2 = c\left[10\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Rightarrow c + 45\cdot 2 = c\left(10\frac{16}{4} + 3\frac{4}{2}\right) \Rightarrow c + 90 = 46c \Rightarrow 45c = 90 \Rightarrow c = 2$$

Οπότε $f(x)=\left(10x^3+3x\right)\cdot 2-45 \Rightarrow f(x)=20x^3+6x-45$

β. Έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(x-h)}{h}=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x)-g'\left(x+(-h)\right)}{-h}\overset{\text{θέτω } -h=t}{\underset{h\to 0\,,\,t\to 0}{=}}-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(x+t)}{t}=$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{-\left(g'(x+t)-g'(x)\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{g'(x+t)-g'(x)}{t}=g''(x)$$

γ.

i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x+h)(x+h)'+g'(x-h)(x-h)'}{2h}=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)+g'(x)-g'(x)}{h}=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right]=$$

$$\overset{(\text{από β. ερώτημα})}{=}\frac{1}{2}\left(g''(x)+g''(x)\right)=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}g''(x)=g''(x)$$

Άρα $g''(x)=f(x)+45 \Leftrightarrow g''(x)=20x^3+6x-\cancel{45}+\cancel{45} \Leftrightarrow \left(g'(x)\right)'=\left(5x^4+3x^2\right)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g'(x)=5x^4+3x^2+c$

Για $x=0$ είναι $g'(0)=5\cdot 0^4+3\cdot 0^2+c \overset{g'(0)=1}{\Rightarrow} c=1$. Άρα $g'(x)=5x^4+3x^2+1$

Είναι $\left(g(x)\right)'=\left(x^5+x^3+x\right)' \Leftrightarrow g(x)=x^5+x^3+x+c_1$

Για $x=0$ είναι $g(0)=0^5+0^3+0+c_1 \overset{g(0)=1}{\Rightarrow} c_1=1$. Άρα $g(x)=x^5+x^3+x+1$

ii) Έχουμε $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ για κάθε $x\in R$,

δηλαδή η g γνησίως αύξουσα , οπότε η g ¨1 – 1¨