ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 22 / 5 / 08

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ 28
Β. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ 96
Γ. $\alpha \to \Lambda$, $\beta \to \Lambda$, $\gamma \to \Sigma$, $\delta \to \Sigma$, $\varepsilon \to \Sigma$

ΘΕΜΑ 2ο

Έχουμε $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$.

Πρέπει $e^x \neq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in R$ οπότε $A_f = R$

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x f(x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{e^x}\dfrac{x-1}{\cancel{e^x}}}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

β) Είναι $f'(x) = \dfrac{(x-1)'e^x - (x-1)(e^x)'}{(e^x)^2} = \dfrac{1\cdot e^x - (x-1)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x - xe^x + e^x}{e^{2x}} = \dfrac{2e^x - xe^x}{e^{2x}} =$

$= \dfrac{\cancel{e^x}(2-x)}{e^{\cancel{2}x}} = \dfrac{2-x}{e^x}$

Οπότε έχουμε $e^x \cdot f'(x) = \cancel{e^x}\dfrac{2-x}{\cancel{e^x}} = 2-x$

γ) Είναι $f'(x) = \dfrac{2-x}{e^x}$ και $A_f = R$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2-x}{e^x} = 0 \Rightarrow 2-x = 0 \Rightarrow x = 2$

$f'(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{2-x}{e^x} > 0 \overset{e^x>0}{\Rightarrow} 2-x > 0 \Rightarrow x < 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Άρα η f παρουσιάζει στο x = 2 τοπικό μέγιστο με τιμή $f(2) = \dfrac{2-1}{e^2} = \dfrac{1}{e^2}$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Έχουμε :

$$\bar{x}_A = \frac{20+26+24+22+18}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

$$\bar{x}_B = \frac{26+32+19+20+23}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

β)

Για την μπαταρία τύπου Α έχουμε :

22 (χιλιάδες ώρες) $\rightarrow$ στοιχίζουν 38 €

1 (χιλιάδες ώρες) $\rightarrow$ στοιχίζουν x €

Οπότε $x = \frac{38}{22} = 1,727$ €

Για την μπαταρία τύπου Β έχουμε :

24 (χιλιάδες ώρες) $\rightarrow$ στοιχίζουν 40 €

1 (χιλιάδες ώρες) $\rightarrow$ στοιχίζουν x €

Οπότε $x = \frac{40}{24} = 1,66$ €

Οπότε συμφέρει να αγοράσουμε μπαταρίες τύπου Β

γ)

$$s_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i - \bar{x}_A)^2}{\nu} = \frac{(20-22)^2+(26-22)^2+(24-22)^2+(22-22)^2+(18-22)^2}{5} =$$

$$= \frac{4+16+4+0+16}{5} = \frac{40}{5} = 8 \quad \text{Άρα } s_A = \sqrt{s_A^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$s_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i - \bar{x}_B)^2}{\nu} = \frac{(26-24)^2+(32-24)^2+(19-24)^2+(20-24)^2+(23-24)^2}{5} =$$

$$= \frac{4+64+25+16+1}{5} = \frac{110}{5} = 22 \quad \text{Άρα } s_B = \sqrt{s_B^2} = \sqrt{22} = \sqrt{11}\cdot\sqrt{2} = 3,3\sqrt{2}$$

δ)

Έχουμε : $CV_A = \frac{s_A}{\bar{x}_A}\cdot 100 = \frac{2\sqrt{2}}{22}\cdot 100 \approx 12,72$

$$CV_B = \frac{s_B}{\bar{x}_B}\cdot 100 = \frac{3,3\sqrt{11}}{24}\cdot 100 \approx 19,25$$

Άρα περισσότερο ομοιογενές είναι το δείγμα Α

2ος Τρόπος

$$\frac{CV_A}{CV_B}=\frac{\frac{2\cancel{\sqrt{2}}}{22}\cdot\cancel{100}}{\frac{3,3\cancel{\sqrt{2}}}{24}\cdot\cancel{100}}=\frac{2\cdot 24}{3,3\cdot 22}=\frac{24}{3,3\cdot 11}=\frac{24}{36,3}<1\Leftrightarrow CV_A<CV_B$$

Άρα περισσότερο ομοιογενές είναι το δείγμα Α

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα :

Α = { να διαβάζει την εφημερίδα α }   και   Β = { να διαβάζει την εφημερίδα β }

Έχουμε : $P(A)=\frac{50}{100}$ και $P(A-B)=\frac{30}{100}$

α) Είναι $A'\cap B=B-A$ **(1)**

και $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)-P(A-B)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{50}{100}-\frac{30}{100}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{20}{100}\quad \textbf{(2)}$$

Οπότε $P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)\overset{(1)}{=}1-P(A)+P(B)-P(B-A)=$

$$=1-P(A)+P(B)-\big(P(B)-P(A\cap B)\big)=1-P(A)+\cancel{P(B)}-\cancel{P(B)}+P(A\cap B)\overset{(2)}{=}1-\frac{50}{100}+\frac{20}{100}=\frac{70}{100}$$

2ος Τρόπος

$$P(A'\cup B)=P\big((A-B)'\big)=1-P(A-B)=1-\frac{30}{100}=\frac{70}{100}$$

β) Είναι $A\cap B\subseteq B\Rightarrow P(A\cap B)\le P(B)\Rightarrow \frac{20}{100}\le P(B)\Rightarrow P(B)\ge\frac{1}{5}$

Είναι $B\subseteq A'\cup B\Rightarrow P(B)\le P(A'\cup B)\Rightarrow P(B)\le\frac{70}{100}\Rightarrow P(B)\le\frac{7}{10}$

Οπότε έχουμε $\frac{1}{5}\le P(B)\le\frac{7}{10}$

γ) Έχουμε $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+P(B)x$ οπότε $A_f=R$

Είναι $f'(x)=3x^2-x+P(B)$

$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-x+P(B)=0$ έχουμε $\Delta=(-1)^2-4\cdot 3\cdot P(B)=1-12P(B)$

Ισχύει από το **(β)** ότι $\frac{1}{5} \le P(B) \le \frac{7}{10} \overset{\cdot(12)}{\Leftrightarrow} \frac{12}{5} \le 12P(B) \le \frac{12 \cdot 7}{10} \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} -\frac{84}{10} \le -12P(B) \le -\frac{12}{5} \Leftrightarrow$

$\overset{+1}{\Leftrightarrow} 1 - \frac{84}{10} \le 1 - 12P(B) \le 1 - \frac{12}{5} \Leftrightarrow -\frac{74}{10} \le \Delta \le -\frac{7}{10}$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα (Δ) βρίσκεται ανάμεσα σε δύο αρνητικές τιμές , άρα $\Delta < 0$ οπότε το τριώνυμο $3x^2 - x + P(B)$ (δηλαδή η $f'(x)$) έχει σε όλο το R πρόσημο ομόσημο του $\alpha = 3 > 0$
Δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

Δηλαδή η $f(x)$ δεν έχει ακρότατα