ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1º

Α1.σελ. 98 σχολικό βιβλίο
Α2.σελ. 141 σχολικό βιβλίο
Α3.σελ. 280 σχολικό βιβλιό

Β.
α. Λ
β. Λ
γ. Λ
δ. Σ
ε. Σ

Θέμα 2º

α)

α' τρόπος

$$|z| = \frac{|2+\alpha i|}{|\alpha + 2i|} = \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{4+\alpha^2}} = 1$$ ή $|z|=1$ κύκλος με Κ(0,0) και R=1

β' τρόπος

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2\iota} = \frac{(2+\alpha i)(\alpha - 2i)}{(\alpha+2i)(\alpha-2i)} = \frac{2\alpha - 4i + \alpha^2 i + 2\alpha}{\alpha^2+4} = \frac{4\alpha}{\alpha^2+4} + \frac{\alpha^2-4}{\alpha^2+4}i$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{4\alpha}{\alpha^2+4} \\ y &= \frac{\alpha^2-4}{\alpha^2+4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{16\alpha^2}{(\alpha^2+4)^2} + \frac{\alpha^4 - 8\alpha^2 + 16}{(\alpha^2+4)^2} = \frac{\alpha^4+8\alpha^2+16}{(\alpha^2+4)^2} = \frac{(\alpha^2+4)^2}{(\alpha^2+4)^2} = 1$$

Άρα $x^2+y^2=1$ κύκλος με Ο(0,0), ρ = 1.

β) $z = \dfrac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$

για $\alpha = 0$, $\quad z_1 = \dfrac{2}{2i} = \dfrac{1}{i} = -i$, με εικόνα το σημείο A(0,-1)

για $\alpha = 2$, $\quad z_2 = \dfrac{2+2i}{2+2i} = \dfrac{1}{1} = 1$, με εικόνα το σημείο B(1,0)

τότε $|z_1 - z_2| = (AB) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

γ) $\left.\begin{array}{l} (z_1)^{2\nu} = (-i)^{2\nu} = [(-i)^2]^{\nu} = (-1)^{\nu} \\ (-z_1)^{\nu} = (-1)^{\nu} \end{array}\right\} \Rightarrow (z_1)^{2\nu} = (-z_1)^{\nu}$

Θέμα 3ο

Έχουμε $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta,\ \theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

α.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	
			Τ.Μ.		Σ.Κ.		Τ.Ε.		

β.

- $\Delta_1 = (-\infty, -1) \quad f(\Delta_1) = \left(-\infty, 2 - 2\eta\mu^2\theta\right)$

  $2 - 2\eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$, γιατί $\theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$

  $0 \in f(\Delta_1)$, άρα η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1)$,
  γιατί στο Δ_1 η f γνησίως αύξουσα

- $\Delta_2 = [-1, 1] \quad f(\Delta_2) = [f(1), f(-1)]$

  $f(\Delta_2) = \left[-2 - 2\eta\mu^2\theta\ ,\ 2 - 2\eta\mu^2\theta\right]$

  $f(\Delta_2) = \left[-2(1 + \eta\mu^2\theta)\ ,\ 2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$

  $0 \in f(\Delta_2)$, άρα η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta_2 = [-1, 1]$,
  γιατί στο Δ_2 η f γνησίως φθίνουσα

- $\Delta_3 = (1, +\infty)$ $\quad f(\Delta_3) = \left(-2(1+\eta\mu^2\theta\ ,\ +\infty\right)$

  $0 \in f(\Delta_3)$, άρα η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta_3 = (1, +\infty)$,

  γιατί στο Δ_3 η f γνησίως αύξουσα

γ.

$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0$

$f(x_1) = f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$, με εικόνα το σημείο $A\left(-1\ ,\ 2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)$

$f(x_2) = f(1) = -2 - 2\eta\mu^2\theta$, με εικόνα το σημείο $B\left(1\ ,\ -2-2\eta\mu^2\theta\right)$

$f(x_3) = f(0) = -2\eta\mu^2\theta$, με εικόνα το σημείο $\Gamma\left(0\ ,\ -2\eta\mu^2\theta\right)$

Έχουμε $\varepsilon:\ y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$

Οι συντεταγμένες των Α, Β, Γ επαληθεύουν την εξίσωση της (ε), άρα τα σημεία Α, Β, Γ ανήκουν στην ευθεία (ε).

δ.

$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$

Έστω $h(x) = \left(x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta\right) - \left(-2x - 2\eta\mu^2\theta\right)$ ή $h(x) = x^3 - x$

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
h(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από C_f και (ε) είναι:

$$E = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx - \int_{0}^{1} h(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\tau.\mu.$$

Θέμα 4ο

α.

α΄ τρόπος

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1] άρα για $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$ επίσης $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1)$ άρα $f(x) \cdot g(x) \geq 0,$ για κάθε $x \in [0,1]$ επομένως

$\int_0^x f(t) \cdot g(t) dt > 0$ για κάθε $x \in (0,1]$, άρα $F(x) > 0$, για κάθε $x \in (0,1]$

β' τρόπος

Είναι $F(x) = \int_0^x f(t) \cdot g(t)\, dt$

$F'(x) = f(x) \cdot g(x) > 0$ (από υπόθεση)

Άρα η F γνησίως αύξουσα οπότε για x>0 F(x)>F(0) ή F(x)>0, για κάθε $x \in (0,1]$

β.

για κάθε $x \in (0,1]$

είναι: $0 \leq t \leq x$ ή $f(t) \leq f(x)$

επίσης $g(t) > 0,$ για κάθε $t \in (0,1]$

άρα $f(t) \cdot g(t) \leq f(x) \cdot g(t)$ ή $f(t) \cdot g(t) - f(x) \cdot g(t) \leq 0,$ για κάθε $x \in (0,1]$

Η $f(t) \cdot g(t) - f(x) \cdot g(t)$ δεν είναι παντού μηδεν στο $(0,1]$, άρα

$$\int_0^x \left[f(t) \cdot g(t) - f(x) \cdot g(t)\right] dt < 0 \quad ή$$

$$ή \quad \int_0^x f(t) \cdot g(t)\, dt < \int_0^x f(x) \cdot g(t)\, dt \quad ή$$

$$ή \quad \int_0^x f(t) \cdot g(t)\, dt < f(x) \int_0^x g(t)\, dt \quad ή$$

$$ή \quad F(x) < f(x) \cdot G(x), \text{ για κάθε } x \in (0,1]$$

γ. Έστω $h(x) = \dfrac{F(x)}{G(x)}$, $x \in (0,1]$

Είναι $h'(x)=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}$

$$h'(x)=\frac{f(x)g(x)G(x)-F(x)g(x)}{G^2(x)}$$

$h'(x)=g(x)\frac{f(x)G(x)-F(x)}{G^2(x)}>0$, για κάθε $x\in(0,1]$

γιατί $g(x)>0$, για κάθε $x\in(0,1]$ και $f(x)G(x)>F(x)$, για κάθε $x\in(0,1]$ λόγω του (β).

Άρα h γνησίως αύξουσα όπου για $x\le 1$ ή $h(x)\le h(1)$ ή $\frac{F(x)}{G(x)}\le\frac{F(1)}{G(1)}$

δ.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)x^5}=A$$

Είναι : $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\underset{\text{Del'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\quad(1)$

γιατί η f είναι συνεχής.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}\underset{\text{Del'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4\cdot 2x}{5x^4}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x^4}{x^4}x\right)=\frac{2}{5}\cdot 1\cdot 0=0\quad(2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει $A=f(0)\cdot 0=0$

Επιμέλεια : Σ. Μυλωνίδης - Α. Τάνης